ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学
SGCライブラリ
122

For Senior & Graduate Courses

可解な量子力学系の数理物理

直交多項式の生み出す多様な展開

◆

佐々木 隆　著



サイエンス社

SGCライブラリ-122

可解な量子力学系の数理物理

直交多項式の生み出す多様な展開

佐々木 隆 著

サイエンス社

序言

大学初年級で学ぶ線形代数の重要な部分を占めるのがエルミート行列（エルミート作用素）の固有値問題である．相異なる固有値に対応する固有ベクトルは「互いに直交する」という著しい性質をもつ．直交多項式は無限次元線形空間で直交基底をなす．では逆に直交多項式は適当なエルミート作用素の固有ベクトルとして実現されるのだろうか？ そのような枠組みを与える数学的構造とは？ という問いが自然に湧き上がる．

調和振動子や水素原子をはじめ様々な量子モデルが（ハミルトニアンと呼ばれる）エルミート作用素の直交分解を用いて記述されることは通常の量子力学の教科書に載っていて周知の通りである．そしてエルミート作用素の互いに異なる固有値，とりわけ隣接する固有値に属する固有ベクトルの相互関係を数理的に解明することは興味のあるテーマである．

本書は，多重ダルブー変換あるいはクラム・アドラー変換と言われるアルゴリズムを用いて，もとのハミルトニアンおよびその基底状態の固有関数から出発して，多添え字直交多項式と呼ばれる直交多項式あるいは直交有理式を構成する手法を系統的に解説している．これらの結果は著者のものを含めてここ十数年に得られた全く新しいものである．

本書の前半ではハミルトニアンが 2 階の微分方程式の場合に，具体的に例示しながら，骨子となる概念であるハミルトニアンの因子化，多重ダルブー変換，可解ポテンシャル．形状不変性などの基本概念が提示される．特に多重ダルブー変換が，種解と呼ばれる消去するべき選択された有限個の固有関数のロンスキアンを用いて記述されることは著しい．

後半ではハミルトニアンが 2 階の差分作用素の場合について解説されている．その際，多重ダルブー変換の定義にロンスキアンに代わってカソラティアンが用いられる．

ハミルトニアンの固有関数と直交多項式は変数 x および正弦的座標 η を通して結びつく．

$$\phi_n(x) = \phi_0(x)\, P_n(\eta(x)) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

この興味深い関係は個別的には知られていたものであろうが，本書では一貫して貫く．

ヤコビ多項式やアスキー・ウィルソン多項式を含む広範な特殊直交多項式のクラスは現在アスキースキームと言われている．この本の第 8 章では離散的ハミルトニアンの可解性すなわちハミルトニアンと正弦的関数との閉性関係式がそのようなクラスを尽くすという極めて重要な主張がなされている．それとともにハミルトニアンと正弦的関数の掛け算作用素が実は双対的スペクトルの関係であるという極めて興味ある事実が自然に導かれている．

本書で扱っているもうひとつのテーマは，多重ダルブー変換と無反射係数の散乱問題との関連を追求していることである．無反射係数の場合の多重ソリトン解およびポテンシャルをダルブーの方法で構成している．量子力学の散乱問題で重要なのは透過係数および反射係数を求めることである

が，可解ハミルトニアンでは散乱振幅を与える関数はしばしば特殊関数によって表示されるので，係数を求めるには $x = \pm\infty$ でのその接続関係を求める必要がある．量子二重対数関数が透過係数に表れるような散乱モデルも示唆されていてダルブーの方法およびその先にあるものの深淵さを垣間見せている．

本書は初心者にはやや読みづらい面もあるが，ダルブー変換を通して相互に関連する興味あるトピックを多様に提示していて，数学や数理物理に関心のある読者を可解量子力学と特殊直交多項式の世界へと誘ってくれることであろう．

2015 年 10 月

青本 和彦

まえがき

量子力学（シュレーディンガー方程式）と直交多項式は，物理・化学・数学・工学の学生・技術者・研究者にとって，とてもなじみ深いものだろう．しかしながら，同時に多くの人たちは，20 世紀後半以降の人類の生活に革命をもたらした現代物理学の礎石としての量子力学の役割と，各分野への数理的応用に際して常に顔を出す直交多項式の重要性は十分認識しつつも，『誕生以来 100 年近く経った量子力学と，19 世紀半ば以降多数の数学者に研究し尽くされた感のある多項式論[1],[2]は，研究課題としてはカビが生えている』ように感じていることだろう．これは大変な認識違いである．1980 年代に Richard Askey を中心とする数学者達によって多数の新しい直交多項式，Wilson 多項式，Askey-Wilson 多項式，q-Racah 多項式等，が発見・構成され，既存のエルミート，ラゲール，ヤコビなどの多項式と合わせて，合計 43 個の Askey-scheme の超幾何直交多項式が確立された[3]~[7]．そして 2008 年から現在までに，厳密可解量子力学の枠組みの中で，これらの多項式の有理変形とも言うべき種々の新しい直交多項式が限り無く構成され，活況を呈している．

一般の直交多項式は無数にあり，その構成法も多種多様である．最もわかりやすいものは，任意の実数区間 $[x_1, x_2]$ で勝手な正値重み関数 $w(x) > 0$ を与えて，多項式列 $\{1, x, x^2, \ldots\}$ をこの順序でグラム・シュミットの方法で直交化するものであろう．これに対比して，Askey-scheme の 43 個の多項式は，その直交性が，2 階の微分方程式（エルミート，ラゲール，ヤコビ，ベッセルの 4 つ），あるいは差分方程式（それ以外の 39 個）に由来するという解析的構造を持っている．これら 43 個の直交多項式はまた，古典直交多項式 (classical orthogonal polynomials) とも呼ばれ，その構造に由来する完備性を備えている．それ故に，直交多項式の応用の主流を成している．定数項から始まる完備な直交多項式で，2 階の微分または差分方程式を満たすものは，これら古典直交多項式にかぎられる（Bochner の定理の拡張）が，条件をゆるめても，完備な直交多項式が 2 階の微分方程式の解として得られることが判り，2008 年以降の新しい直交多項式の爆発的発見につながった．これら新しい直交多項式は，ある次数 $\ell \geq 1$ から始まる，あるいは定数項から始まるが途中の次数に『穴』がある，あるいはその両方の特徴を持ち，2 階の微分または差分方程式を満たす．

線形代数（量子力学）でよく知られているように，エルミート行列（自己共役演算子，ハミルトニアン）の固有ベクトル系（固有関数系）は，互いに直交し，完全系を成す．調和振動子の例で典型的に示されるように，エルミート，ラゲール，ヤコビ多項式の種々の性質は，それらを完全に解ける量子力学（シュレーディンガー方程式）の固有値問題の固有関数の主要部としてとらえることで，統一的に理解できる．例えば，直交重み関数は，基底状態（最低固有値）固有関数の 2 乗 $\phi_0(x)^2$ で与えられる．量子力学の枠組みを広げて，2 階の差分方程式のシュレーディンガー方程式を含むようにした‘離散量子力学’では，Askey-scheme の他の多項式も扱えるようになる．すると，建設以来 100 年近くにわたって発展・蓄積されてきた量子力学の種々の方法・概念等によって，古典直

交多項式すべての種々の性質・定理・応用などを統一的に理解し，更に発展させることができる．この方針の下で，著者と小竹悟さんおよび幾多の研究者達が過去十数年間にわたって得た結果が，本書の骨組みを成している．具体的にはまず，シュレーディンガー方程式が完全に解けることの十分条件としての形状不変性の同定，それとクラムの定理に基づいた普遍的固有値公式，固有多項式を与える普遍的ロドリーグ公式，ノルム公式，多項式の前方・後方ずらし演算子などの結果がある．これらは，従来個々の多項式ごとに個別に得られていた[6]ものである．シュレーディンガー方程式の解の主要部として現れる古典直交多項式は，$P_n(\eta(x))$ の形をしており，シュレーディンガー方程式の座標 x の特定の関数である‘正弦的座標’ $\eta(x)$ の多項式になっている．古典直交多項式を記述する量子力学では，この $\eta(x)$ のハイゼンベルグ演算子解が閉じた形で求まる．これは，古典直交多項式における三項関係式の 1 つの表現形式になっている．ハイゼンベルグ演算子解からは，固有値を決定する過剰決定の代数方程式と生成・消滅演算子が得られ，古典直交多項式のシュレーディンガー方程式の可解性のもう一つの十分条件になっている．また生成・消滅演算子とハミルトニアンで生成する動力学対称性代数が同定できる．これらは，通常の多項式論では扱わない話題である．更には，通常のシュレーディンガー方程式では 19 世紀以来よく知られていたダルブー変換の対応物が，離散量子力学でも存在することを示し，古典直交多項式全般に適用できる変形方法を確立した．古典直交多項式に対応する量子力学系の持つ離散対称性，云い換えるとパラメタのひねり（対合）によって種解を作り，それを用いて多重ダルブー変換を行うことで，新しい直交多項式を構成する，等々がある．これらの結果は，本質的にすべての古典直交多項式に共通のものであるが，記号・記法の違いや説明の容易さなどの理由により，なじみの深い通常の量子力学の結果を第 1 章から第 5 章で述べ，対応する離散量子力学のものを第 6 章から第 10 章に記した．

「可解量子力学と直交多項式」で云う量子力学は，2 階微分および差分のシュレーディンガー方程式を含み，扱う直交多項式は，古典直交多項式およびそれらの有理変形から得られる新しい直交多項式達で，いずれも 2 階の微分・差分方程式を満たす．いわゆる直交多項式一般の議論や漸近展開などの話題は，Szegö[1], Andrews-Askey-Roy[4], Ismail[5], 青本[7] 等の成書に譲り，統一的に得られる多くの結果や，シュレーディンガー方程式の変形手段であるダルブー・クラム変換などから導かれる新しい直交多項式に重点を置いている．本書を理解するための必要知識は，線形代数，解析，微分方程式，量子力学などの基礎知識ぐらいである．学部 4 年生，修士課程 1 年生程度で十分理解できると思っている．学生や若い研究者諸君に強く勧めたいことは，本書の主な結果や定理などを，具体的な個々の多項式に限定して，Mathematica や Maple 等のプログラムを使って検算することである．それを何度か繰り返すと，対象が身近に感じられ，一般論が豊かな色彩を帯びているように見えてくるはずである．

本書を書き終えるにあたり，長い間研究を共にしてきた小竹悟さんと，直交多項式を含めて多くの事柄をご教示下さり，洞察に富む『序言』をお寄せ下さった青本和彦さんに厚く感謝いたします．また，サイエンス社の平勢耕介さんには，何年にもわたり辛抱強く執筆を見守り，多くの技術的な助言を下さったことにお礼申し上げます．

2015 年 11 月

佐々木 隆

目　次

第 1 章　一般的な定式化 **1**

1.1　1 次元量子力学：問題設定 1

1.2　因子化ハミルトニアン 2

1.3　クラムの定理と絡み合わせ関係式 4

1.3.1　例：無限に深い井戸型ポテンシャル 7

1.4　クラムの定理の拡張 10

1.4.1　特別な場合 12

1.5　ダルブー変換 13

1.6　3 つの可解ポテンシャル 15

1.6.1　確定特異点 18

1.7　ダルブー変換等の具体例 20

1.7.1　具体例：クラムの定理の拡張 20

1.7.2　具体例：ダルブー変換 21

第 2 章　形状不変性：可解性の十分条件 **23**

2.1　固有値・固有関数の決定，ロドリーグの公式 23

2.2　前方・後方ずらし演算子具体例 25

2.3　他の形状不変なポテンシャル 29

2.3.1　$1/\sin^2 x$ ポテンシャル 29

2.3.2　遠心力付きのクーロンポテンシャル 30

2.3.3　球状空間でのケプラー問題 31

2.3.4　モースポテンシャル 31

2.3.5　$1/\cosh^2 x$（ソリトン）ポテンシャル 32

2.3.6　ローゼン・モース (Rosen-Morse) ポテンシャル 33

2.3.7　双曲的対称こま II 33

2.3.8　エッカート (Eckart) ポテンシャル 34

2.3.9　双曲的ポッシェル・テラーポテンシャル 34

2.4　形状不変でなくて可解なポテンシャル 35

2.5　可解なフォッカー・プランク方程式 36

第 3 章　ハイゼンベルグ描像での可解性 **38**

3.1　閉性関係式 38

3.2 生成・消滅演算子 42
3.3 動力学的対称性代数とコヒーレント状態 43
3.4 ハイゼンベルグ方程式解の具体例 44
3.4.1 H: 調和振動子 44
3.4.2 L: 遠心力付きの振動子，$x^2 + 1/x^2$ ポテンシャル 45
3.4.3 $1/\sin^2 x$ ポテンシャル 46
3.5 ボッホナーの定理 49

第 4 章 新しい直交多項式 52
4.1 離散対称性と多項式種解 52
4.1.1 L, J の仮想状態波動関数 53
4.1.2 擬仮想状態波動関数 55
4.2 多添え字直交多項式 55
4.2.1 変形されたハミルトニアン 58
4.2.2 新直交多項式の満たす 2 階微分方程式 59
4.3 具体形：新直交多項式 60
4.3.1 多添え字ラゲール多項式 61
4.3.2 多添え字ヤコビ多項式 65
4.4 擬仮想状態と固有状態の双対性 69

第 5 章 可解な散乱問題 73
5.1 散乱問題の設定 73
5.2 無反射ポテンシャル 75
5.3 可解な散乱問題の拡張 77
5.4 具体例：$1/\cosh^2 x$ ポテンシャル 78

第 6 章 離散量子力学の一般的な定式化 81
6.1 因子化ハミルトニアン：離散量子力学 81
6.2 解析性とエルミート性（自己共役性）：idQM 88
6.3 クラムの定理と絡み合わせ関係式：離散量子力学 89
6.3.1 特別な場合 90
6.4 クラムの定理の拡張：離散量子力学 92
6.5 ダルブー変換：虚離散量子力学 93

第 7 章 離散量子力学での形状不変性 96
7.1 前方・後方ずらし演算子 97
7.2 クラムの定理の拡張：特別な場合，純虚数ずらし 100
7.3 クラムの定理の拡張：特別な場合，実数ずらし 102

第 8 章　ハイゼンベルグ描像での可解性：離散量子力学 107
8.1 ハイゼンベルグ運動方程式 107
8.2 双対多項式 109
8.3 可解な出生死亡過程 113
8.4 可解な離散量子力学の統一理論 115
8.4.1 ポテンシャル関数 115
8.4.2 ハイゼンベルグ可解性の統一的証明 120
8.4.3 双対閉性関係式 121
8.5 Askey-Wilson 代数 123

第 9 章　新しい直交多項式：離散量子力学 126
9.1 純虚数ずらし離散量子力学 126
9.1.1 仮想状態解の構成 126
9.1.2 Wilson および Askey-Wilson 系の離散対称性 127
9.1.3 多添え字 Wilson および Askey-Wilson 多項式の一般形 129
9.1.4 多添え字 Wilson 多項式および Askey-Wilson 多項式の具体形 134
9.1.5 多添え字直交多項式系のエルミート性（自己共役性） 135
9.2 実数ずらし離散量子力学 137
9.2.1 対称性と仮想状態ベクトル 137
9.2.2 多添え字 (q-)Racah 多項式の構成 140
9.2.3 多添え字 (q-)Racah 多項式の明示的な形 147

第 10 章 可解な散乱問題：離散量子力学 154
10.1 無反射ポテンシャル：idQM 154
10.2 離散版の $1/\cosh^2 x$ ポテンシャル 159
10.3 散乱問題 164

おわりに 167

付録 A　記号，定義，公式など 169

参考文献 171
索　引 177

第 1 章
一般的な定式化

量子力学の基礎的な事柄は，標準的な教科書[8], [9]を参照していただくこととして，この本では厳密に解けるシュレーディンガー (Schrödinger) 方程式を議論する．つまり，**時間に依存しない**ハミルトニアン (Hamiltonian) $\mathcal{H}$ の固有値問題

$$\mathcal{H}\psi(x) = \mathcal{E}\psi(x), \qquad \mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \frac{p_j^2}{2m_j} + U(x),$$

が厳密に解けるようなポテンシャル $U(x) \in \mathbb{R}$ を作り上げ，その解を構成する様々な方法を示すこととする．そのうちでも，最も基本的な場合，つまり 1 自由度の量子力学を中心に論じて，多自由度系への可能な一般化については，折に触れて述べてゆく．この章では，1 次元量子力学系全般の持つ普遍的性質を論じる．

1.1 1 次元量子力学：問題設定

区間 (x_1, x_2) で定義された 1 次元の量子力学（以後，1-d QM と略記する）を考えよう．ここで，x_1 および x_2 は無限大であってもよい．境界点 x_j，$j = 1, 2$ が有限である場合には，そこでポテンシャルは無限大の障壁 $\lim_{x \to x_j} U(x) = +\infty$ とならねばならない．さもないと，粒子は区間 (x_1, x_2) の外側へ，しみ出てしまう (tunnel out) からである．これは，量子力学のシュレーディンガー方程式の特徴で，有限区間での一般的なスツルム・リュービル (Sturm-Liouville) 方程式とはっきり異なる点である．このことから，波動関数の正しい境界条件が出てくる．QM の力学変数は，座標 x とその共役運動量 p であり，運動量演算子は微分演算子 $p = -i\hbar\frac{d}{dx} \equiv -i\hbar\partial_x$ として実現される．これ以降本書では $\hbar = 1$ と $2m = 1$ として，実でなめらかなポテンシャル $U(x) \in \mathbf{C}^\infty$ に依存する次のようなハミルトニアン

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d^2}{dx^2} + U(x), \qquad x_1 < x < x_2, \tag{1.1}$$

を考える．また，ハミルトニアンは**下に有界** (bounded from below) なもののみを扱う．与えられたハミルトニアン (1.1) の**固有値問題**とは，すべての離散固有値 $\{\mathcal{E}(n)\}$ とそれに対応する固有関数 $\{\phi_n(x)\}$

$$\mathcal{H}\phi_n(x) = \mathcal{E}(n)\phi_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

を決定することである．固有値の番号付けは，単調増加

$$0 = \mathcal{E}(0) < \mathcal{E}(1) < \mathcal{E}(2) < \cdots \tag{1.3}$$

とする．ハミルトニアン（ポテンシャル）に定数を付け加えることによって，最低固有値（基底状態のエネルギー）は常に零に取れる $0 = \mathcal{E}(0)$．固有関数は下の内積に関して互いに**直交**する

$$(\phi_n, \phi_m) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \phi_n(x)^* \phi_m(x) dx = h_n \delta_{n\,m},$$
$$0 < h_n < \infty, \quad n, m = 0, 1, \ldots.$$

これは，ハミルトニアンの**エルミート性**（自己共役性）の帰結である[8],[9]．**振動定理**は，n 番目の固有関数 $\phi_n(x)$ が n 個の単純零点を区間 (x_1, x_2) に持つことを言う．特に，基底状態 $\phi_0(x)$ は区間 (x_1, x_2) に零点を持たないので，常に正 $\phi_0(x) > 0$ に取るように定めよう．また，すべての離散固有関数は，実数 $\phi_n(x) \in \mathbb{R}$ であるように選ぼう．

おおざっぱに言って，問題は 2 つの型に分かれる．ひとつは，**閉じ込め型**のポテンシャル $\lim_{x\to x_1+0} U(x) = +\infty = \lim_{x\to x_2-0} U(x)$ で，無限個の離散固有値を持つ．他方は，非閉じ込め型のポテンシャルで，有限個または無限個の離散固有値を持ち，もしどちらかの端点が無限大であるならば $x_1 = -\infty$ and/or $x_2 = +\infty$，連続固有値に関して，**散乱問題**を考えることになる．散乱問題の設定は 5.1 節の始めに述べられる．

有限個または無限個の**すべての**離散固有値と対応する固有関数が明示的に得られる場合に，そのようなポテンシャルを**厳密可解** (exactly solvable) であると言おう．

1.2 因子化ハミルトニアン

与えられたハミルトニアン (1.1) が有限個あるいは無限個の離散固有状態を持つ場合の固有値問題を考えよう．前述のように $\mathcal{E}(0) = 0$ と取ってあるので，ハミルトニアンは**半正定値** (positive semi-definite) である．線形代数でよく知られているように，半正定値のエルミート行列は，適当な行列 $\mathcal{A}$ とそのエ

ルミート共役 $\mathcal{A}^\dagger$ の積として表される，$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$. しかし，この行列 $\mathcal{A}$ は一意的ではなく，勝手なユニタリ行列 $UU^\dagger = U^\dagger U = E$（$E$ は単位行列）による変換

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}' \stackrel{\text{def}}{=} U\mathcal{A} \tag{1.4}$$

の自由度がある．以下にすぐに示すように，我々が考えている一般のハミルトニアンも常に因子化される．これは，多自由度の場合も同じである．

我々の考えている因子化ハミルトニアンは次のような表式を持つ[10], [11]

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}, \qquad D\,\text{次元では}\quad \mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{D} \mathcal{A}_j^\dagger\mathcal{A}_j. \tag{1.5}$$

1-d QM の場合には，演算子 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}^\dagger$ は $(w(x) \in \mathbb{R})$,

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} - \frac{dw(x)}{dx} = \frac{d}{dx} - \frac{\partial_x\phi_0(x)}{\phi_0(x)}, \qquad \phi_0(x) = e^{w(x)}, \tag{1.6}$$

$$\mathcal{A}^\dagger = -\frac{d}{dx} - \frac{dw(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} - \frac{\partial_x\phi_0(x)}{\phi_0(x)},$$

$$\mathcal{H} = p^2 + U(x), \quad U(x) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\partial_x w(x)\big)^2 + \partial_x^2 w(x), \tag{1.7}$$

と表される，ここで，基底状態波動関数 $\phi_0(x)$ の対数を取った $w(x)$ は**プレポテンシャル** (prepotential) と呼ばれる．多自由度系のハミルトニアンの因子化も同様である

$$\mathcal{A}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial w(x)}{\partial x_j}, \quad \mathcal{A}_j^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial w(x)}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, D),$$
$$\phi_0(x) = e^{w(x)}.$$

このプレポテンシャルの方法は，多自由度のカロジェロ・モーザー (Calogero-Moser) 系[12]でも有用である．

上のシュレーディンガー方程式 (1.2) は，2 階の微分方程式であるが，**基底状態波動関数** $\phi_0(x)$ は，1 階の微分演算子 $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}_j$) のゼロモードとして決定される

$$\mathcal{A}\phi_0(x) = 0 \quad (\mathcal{A}_j\phi_0(x) = 0,\ j = 1, \ldots, D) \quad \Rightarrow\ \mathcal{H}\phi_0(x) = 0. \tag{1.8}$$

注意すべきは，$\mathcal{A}$ のゼロモードの逆数は，$\mathcal{A}^\dagger$ のゼロモードになることである．

$$\mathcal{A}^\dagger\phi_0^{-1}(x) = 0 \quad (\mathcal{A}_j^\dagger\phi_0^{-1}(x) = 0,\ j = 1, \ldots, D). \tag{1.9}$$

この節の終わりに次のことを強調しておこう．もとのハミルトニアン (1.1) の零点を持たない任意の解（例えば，常に正の解）

$$\mathcal{H}\tilde{\phi}(x) = \tilde{\mathcal{E}}\tilde{\phi}(x), \quad \tilde{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\phi}(x) > 0, \quad x \in (x_1, x_2), \tag{1.10}$$

は，もとのハミルトニアンの非特異な因子化

$$\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{A}}^\dagger \tilde{\mathcal{A}} + \tilde{\mathcal{E}}, \quad \tilde{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} - \frac{\partial_x \tilde{\phi}(x)}{\tilde{\phi}(x)}, \quad \tilde{\mathcal{A}}^\dagger = -\frac{d}{dx} - \frac{\partial_x \tilde{\phi}(x)}{\tilde{\phi}(x)},$$

を与える．エルミート行列の時の因子化の不定性 (1.4) と同様に，QM のハミルトニアンの因子化は一意的でない．

1.3 クラムの定理と絡み合わせ関係式

この節では，1-d QM の解空間の一般的な構造を示そう．元々の因子化されたハミルトニアン $\mathcal{H}$ (1.1), (1.5) を $\mathcal{H}^{[0]}$ と書くことにしよう．因子 $\mathcal{A}^\dagger$ と $\mathcal{A}$ の順序を変えて，**相棒の** (partner)（随伴する，associated）ハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]}$ を定義しよう:

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}^{[0]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}, \qquad \mathcal{H}^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{H}^{[0]} - 2\partial_x^2 \log \phi_0(x). \tag{1.11}$$

この 2 つの因子化されたハミルトニアン達 (1.11) の，一つの簡単なそして最も重要な帰結は，**絡み合わせ** (intertwining) 関係式

$$\mathcal{A}\mathcal{H}^{[0]} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = \mathcal{H}^{[1]}\mathcal{A}, \qquad \mathcal{A}^\dagger\mathcal{H}^{[1]} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{H}^{[0]}\mathcal{A}^\dagger, \tag{1.12}$$

である．この 2 つのハミルトニアン $\mathcal{H}^{[0]}$ と $\mathcal{H}^{[1]}$ とは，本質的に**等スペクトル** (iso-spectral) で，それぞれの固有関数系 $\{\phi_n^{[0]}(x)\}$ と $\{\phi_n^{[1]}(x)\}$ は，ダルブー・クラム (Darboux-Crum) 変換[13], [14]で関係している:

$$\mathcal{H}^{[0]}\phi_n^{[0]}(x) = \mathcal{E}(n)\phi_n^{[0]}(x) \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad \mathcal{A}\phi_0^{[0]}(x) = 0,$$
$$\mathcal{H}^{[1]}\phi_n^{[1]}(x) = \mathcal{E}(n)\phi_n^{[1]}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$\phi_n^{[1]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}\phi_n^{[0]}(x), \quad \phi_n^{[0]}(x) = \frac{\mathcal{A}^\dagger}{\mathcal{E}(n)}\phi_n^{[1]}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$(\phi_n^{[1]}, \phi_m^{[1]}) = \mathcal{E}(n)(\phi_n^{[0]}, \phi_m^{[0]}) \quad (n, m = 1, 2, \ldots).$$

相棒のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]}$ は，時には随伴ハミルトニアンとも呼ばれるが，$\mathcal{E}(1)$ が最低固有値になり，$\mathcal{E}(0)$ に対応する状態は欠けている．言い換えると，$\mathcal{H}^{[0]}$ の最低固有値 $\mathcal{E}(0)$ に対応する固有状態は，$\mathcal{H}^{[0]} \to \mathcal{H}^{[1]}$ の変換で，**削除されている** (deleted).

相棒のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]}$ から，その基底状態エネルギー $\mathcal{E}(1)$ を引き去ると，それはまた半正定値になり，新しい演算子 $\mathcal{A}^{[1]}$ と $\mathcal{A}^{[1]\dagger}$ で因子化されることになる:

$$\mathcal{H}^{[1]} = \mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[1]} + \mathcal{E}(1), \quad \mathcal{A}^{[1]}\phi_1^{[1]}(x) = 0. \tag{1.13}$$

因子 $\mathcal{A}^{[1]\dagger}$ と $\mathcal{A}^{[1]}$ の順序を変えて，新しいハミルトニアン $\mathcal{H}^{[2]}$ が定義できる:

$$\mathcal{H}^{[2]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{[1]}\mathcal{A}^{[1]\dagger} + \mathcal{E}(1) = \mathcal{H}^{[1]} - 2\partial_x^2 \log|\phi_1^{[1]}(x)|.$$

これら 2 つのハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]} - \mathcal{E}(1)$ と $\mathcal{H}^{[2]} - \mathcal{E}(1)$ は，$\mathcal{A}^{[1]}$ と $\mathcal{A}^{[1]\dagger}$ によって絡み合わされている:

$$\mathcal{A}^{[1]}\big(\mathcal{H}^{[1]} - \mathcal{E}(1)\big) = \mathcal{A}^{[1]}\mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[1]} = \big(\mathcal{H}^{[2]} - \mathcal{E}(1)\big)\mathcal{A}^{[1]},$$
$$\mathcal{A}^{[1]\dagger}\big(\mathcal{H}^{[2]} - \mathcal{E}(1)\big) = \mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[1]}\mathcal{A}^{[1]\dagger} = \big(\mathcal{H}^{[1]} - \mathcal{E}(1)\big)\mathcal{A}^{[1]\dagger}.$$

2 つのハミルトニアン $\mathcal{H}^{[1]}$ と $\mathcal{H}^{[2]}$ の等スペクトル性と，それらの固有関数系の関係が前と同様にして得られる:

$$\mathcal{H}^{[2]}\phi_n^{[2]}(x) = \mathcal{E}(n)\phi_n^{[2]}(x) \quad (n = 2, 3, \ldots),$$
$$\phi_n^{[2]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{[1]}\phi_n^{[1]}(x), \quad \phi_n^{[1]}(x) = \frac{\mathcal{A}^{[1]\dagger}}{\mathcal{E}(n) - \mathcal{E}(1)}\phi_n^{[2]}(x) \quad (n = 2, 3, \ldots),$$
$$(\phi_n^{[2]}, \phi_m^{[2]}) = \big(\mathcal{E}(n) - \mathcal{E}(1)\big)(\phi_n^{[1]}, \phi_m^{[1]}) \quad (n, m = 2, 3, \ldots),$$
$$\mathcal{H}^{[2]} = \mathcal{A}^{[2]\dagger}\mathcal{A}^{[2]} + \mathcal{E}(2), \quad \mathcal{A}^{[2]}\phi_2^{[2]}(x) = 0.$$

この 2 つを結ぶ変換 $\mathcal{H}^{[1]} \to \mathcal{H}^{[2]}$ によって，$\mathcal{E}(1)$ に対応する状態が削除された，$\mathcal{A}^{[1]}\phi_1^{[1]}(x) = 0$.

この最低エネルギー状態を次々と削除してゆく過程は，際限なく続けることができる:

$$\mathcal{H}^{[s]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{[s-1]}\mathcal{A}^{[s-1]\dagger} + \mathcal{E}(s-1) = \mathcal{H}^{[s-1]} - 2\partial_x^2 \log|\phi_{s-1}^{[s-1]}(x)| = \mathcal{A}^{[s]\dagger}\mathcal{A}^{[s]} + \mathcal{E}(s), \tag{1.14}$$
$$\mathcal{H}^{[s]}\phi_n^{[s]}(x) = \mathcal{E}(n)\phi_n^{[s]}(x) \ (n = s, s+1, \ldots), \ \mathcal{A}^{[s]}\phi_s^{[s]}(x) = 0, \tag{1.15}$$
$$\phi_n^{[s]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{[s-1]}\phi_n^{[s-1]}(x), \quad \phi_n^{[s-1]}(x) = \frac{\mathcal{A}^{[s-1]\dagger}}{\mathcal{E}(n) - \mathcal{E}(s-1)}\phi_n^{[s]}(x) \quad (n = s, s+1, \ldots), \tag{1.16}$$
$$(\phi_n^{[s]}, \phi_m^{[s]}) = \big(\mathcal{E}(n) - \mathcal{E}(s-1)\big)(\phi_n^{[s-1]}, \phi_m^{[s-1]}) \quad (n, m = s, s+1, \ldots). \tag{1.17}$$

第 s 番目の段階の諸量は, 第 $(s-1)$ 番目 $(s \geq 1)$ の段階のものから定義される:

$$w^{[s]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log|\phi_s^{[s]}(x)|, \quad \phi_n^{[s]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{[s-1]}\phi_n^{[s-1]}(x), \tag{1.18}$$
$$\mathcal{A}^{[s]} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x - \partial_x w^{[s]}(x), \quad \mathcal{A}^{[s]\dagger} = -\partial_x - \partial_x w^{[s]}(x). \tag{1.19}$$

第 s 番目の段階の固有関数は，**ロンスキアン** (Wronskian) を用いて簡潔な**行列式表示** (determinant form) ができる $(n \geq s \geq 0)$:

$$\mathrm{W}[f_1, \ldots, f_m](x) \stackrel{\text{def}}{=} \det\Big(\frac{d^{j-1}f_k(x)}{dx^{j-1}}\Big)_{1 \leq j,k \leq m}, \tag{1.20}$$

$$\mathcal{H}^{[s]} = \mathcal{H}^{[0]} - 2\partial_x^2 \log |\mathrm{W}\,[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}](x)|, \tag{1.21}$$

$$\phi_n^{[s]}(x) = \frac{\mathrm{W}\,[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_n](x)}{\mathrm{W}\,[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}](x)}. \tag{1.22}$$

行列式の公式 (1.21) と (1.22) とを導くには，ロンスキアンの次の性質が役に立つ:

$$\mathrm{W}[gf_1, gf_2, \ldots, gf_n](x) = g(x)^n \mathrm{W}[f_1, f_2, \ldots, f_n](x), \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{W}[f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y)](x) \\ &\qquad = y'(x)^{n(n-1)/2} \mathrm{W}[f_1, f_2, \ldots, f_n](y), \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{W}\big[\mathrm{W}[f_1, f_2, \ldots, f_n, g], \mathrm{W}[f_1, f_2, \ldots, f_n, h]\,\big](x) \\ &= \mathrm{W}[f_1, f_2, \ldots, f_n](x)\, \mathrm{W}[f_1, f_2, \ldots, f_n, g, h](x) \qquad (n \geq 0). \end{aligned} \tag{1.25}$$

帰納法によって固有関数の行列式表示 (1.22) を示してみよう:

$$\begin{aligned} \phi_n^{[s+1]} &= \mathcal{A}^{[s]} \phi_n^{[s]}(x) \qquad \mathcal{A}^{[s]} = \frac{d}{dx} - \phi_s^{[s]\prime}(x)/\phi_s^{[s]}(x), \\ &= \frac{\phi_s^{[s]} \phi_n^{[s]\prime} - \phi_s^{[s]\prime} \phi_n^{[s]}}{\phi_s^{[s]}} = \frac{\mathrm{W}[\phi_s^{[s]}, \phi_n^{[s]}](x)}{\phi_s^{[s]}(x)} \\ &= \frac{\mathrm{W}\,[\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_s], \mathrm{W}[[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_n]]\,(x)}{\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}]^2(x)(\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_s](x)/\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}](x))} \\ &= \frac{\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}](x) \mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_s, \phi_n](x)}{\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}](x) \mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_s](x)} \\ &= \frac{\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_s, \phi_n](x)}{\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_s](x)}. \end{aligned} \qquad \square$$

ハミルトニアンの表式 (1.21) は，次のようにして判る:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{[s+1]} &= \mathcal{H}^{[s]} - 2\partial_x^2 \log |\phi_s^{[s]}(x)| \\ &= \mathcal{H}^{[0]} - 2\partial_x^2 \log |\mathrm{W}\,[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}](x)| \\ &\qquad - 2\partial_x^2 \log \frac{|\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_s](x)|}{|\mathrm{W}[\phi_0, \ldots, \phi_{s-1}](x)|} \\ &= \mathcal{H}^{[0]} - 2\partial_x^2 \log |\mathrm{W}\,[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_s](x)|. \end{aligned} \qquad \square$$

ロンスキアンのもう一つの有用な性質は，微分 $\frac{d}{dx}$ を，任意のなめらかな関数 $q_i(x)$ による勝手な「共変微分」D_i に置き換えても変わらないということである:

$$\begin{aligned} &D_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} - q_i(x), \\ &\mathrm{W}[f_1, f_2, \ldots, f_n](x) = \det\big(D_{j-1} \cdots D_2 D_1 f_k(x)\big)_{1 \leq j,k \leq n}. \end{aligned}$$

ここで $D_{j-1} \cdots D_2 D_1 \big|_{j=1} = 1$ である．第 s 番目の段階の固有関数のノルムは簡単で，統一的な形を持つ:

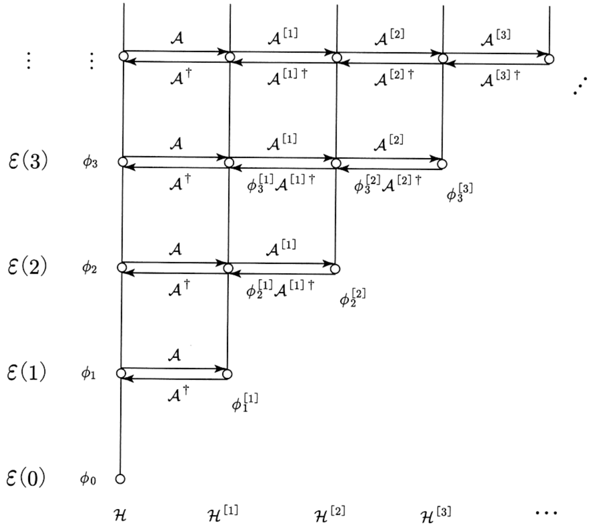


図 1.1　1 次元量子力学解空間の一般的様相.

$$(\phi_n^{[s]}, \phi_m^{[s]}) = \prod_{j=0}^{s-1} \bigl(\mathcal{E}(n) - \mathcal{E}(j)\bigr) \cdot (\phi_n, \phi_m). \tag{1.26}$$

これまでをまとめて次のような定理に到達する:

定理 1.1（**Crum**[14]）　与えられたハミルトン系 $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}^{[0]}$ に対して，その正の離散固有値の数と同じ数だけの随伴ハミルトン系 $\mathcal{H}^{[1]}$, $\mathcal{H}^{[2]}$, ..., が存在する．それらは，もとのハミルトン系の固有値 $\{\mathcal{E}(n)\}$ を共有し，$\mathcal{H}^{[j]}$ と $\mathcal{H}^{[j+1]}$ の固有関数達は $\mathcal{A}^{[j]}$ と $\mathcal{A}^{[j]\dagger}$ とによって関係付けられている．

クラムの定理の状況を例示したものが図 1.1 である．もし，元々の系 $\mathcal{H}^{[0]}$ が厳密可解であれば，すべての随伴ハミルトン系 $\{\mathcal{H}^{[j]}\}$ も厳密可解になる．

1.3.1　例：無限に深い井戸型ポテンシャル

1 次元量子力学において最も簡単な問題，'有限区間中に閉じ込められた自由粒子'，つまり無限に深い井戸型ポテンシャル（図 1.2）の中の粒子の問題からは学ぶところが非常に多い．そのハミルトニアン:

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} - 1 = \mathcal{A}^{\dagger}\mathcal{A}, \quad 0 < x < \pi, \tag{1.27}$$

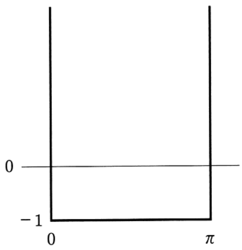


図 1.2　幅 π で無限に深い井戸型ポテンシャル.

$$\phi_0(x) = \sin x = e^{w(x)},\ w(x) = \log\sin x, \tag{1.28}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dx} - \cot x, \quad \mathcal{A}^\dagger = -\frac{d}{dx} - \cot x, \quad \mathcal{A}\phi_0(x) = 0, \tag{1.29}$$

は次のような固有関数系を持つ:

$$\phi_n(x) = \sin(n+1)x, \quad \mathcal{E}(n) = n(n+2), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.30}$$

$$= \phi_0(x)U_n(\cos x), \tag{1.31}$$

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_0^\pi \sin(n+1)x \sin(m+1)x\, dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n\,m}, \tag{1.32}$$

$$= \int_{-1}^1 U_n(\eta)U_m(\eta)\sqrt{1-\eta^2}d\eta. \tag{1.33}$$

ここで $U_n(\cos x) \overset{\text{def}}{=} \sin(n+1)x/\sin x$ は $\cos x$ の n 次の多項式で，**第 2 種のチェビシェフ** (Chebyshev) **多項式**と呼ばれる．固有関数は因子化されており (1.62)，$\eta(x) = \cos x$ は後に導入される正弦的座標の最も簡単な例である．このポテンシャルはなめらかな閉じ込めポテンシャルの極限と考えることもできる: $\lim_{\epsilon\to 0+}\mathcal{H}_\epsilon = \mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_\epsilon \overset{\text{def}}{=} -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\epsilon(1+\epsilon)}{\sin^2 x} - (1+\epsilon)^2, \quad 0 < x < \pi.$$

随伴ハミルトン系[14]は次のようになる:

$$\mathcal{H}^{[1]} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{\sin^2 x} - 1 = \mathcal{A}^{[1]\dagger}\mathcal{A}^{[1]} - \mathcal{E}(1),\ \mathcal{A}^{[1]} = \frac{d}{dx} - 2\cot x,$$

$$\phi_1^{[1]}(x) = -2\sin^2 x, \qquad \phi_2^{[1]}(x) = \phi_1^{[1]}(x) \times 4\cos x,$$

$$\phi_3^{[1]}(x) = \phi_1^{[1]}(x) \times 2(6\cos^2 x - 1),$$

$$\phi_4^{[1]}(x) = \phi_1^{[1]}(x) \times 4\cos x(8\cos^2 x - 3), \ldots,$$

$$\mathcal{H}^{[2]} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{6}{\sin^2 x} - 1 = \mathcal{A}^{[2]\dagger}\mathcal{A}^{[2]} - \mathcal{E}(2), \quad \mathcal{A}^{[2]} = \frac{d}{dx} - 3\cot x,$$

$$\phi_2^{[2]}(x) = 8\sin^3 x, \qquad \phi_3^{[2]}(x) = \phi_2^{[2]}(x) \times 48\cos x,$$

$$\phi_4^{[2]}(x) = \phi_2^{[2]}(x) \times 24(8\cos^2 x - 1),$$
$$\phi_5^{[2]}(x) = \phi_2^{[2]}(x) \times 64\cos x(10\cos^2 x - 3), \ldots,$$
$$\mathcal{H}^{[s]} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{s(s+1)}{\sin^2 x} - 1 = \mathcal{A}^{[s]\dagger}\mathcal{A}^{[s]} - \mathcal{E}(s),$$
$$\mathcal{A}^{[s]} = \frac{d}{dx} - (s+1)\cot x,$$
$$\phi_s^{[s]}(x) = (-2)^s s! \sin^{s+1} x,\ \phi_n^{[s]}(x) \propto \phi_s^{[s]}(x) \times P_{n-s}^{(s+1/2,s+1/2)}(\cos x).$$

ここで $\propto$ は，スカラー倍を除いて等しいことを意味し，$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は**ヤコビ (Jacobi) 多項式**である．

上の例は，区間 $(0,\pi)$ での自明なポテンシャル $V(x) \equiv -1$ に，両端でディリクレ境界条件，$\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ を課したスツルム・リューヴィル方程式とも見なせる．では，量子力学の問題にはならないが，区間 $(0,\pi)$ での自明なポテンシャル $V(x) \equiv 0$ に，両端でノイマン境界条件，$\partial_x\phi(0) = \partial_x\phi(\pi) = 0$ を課したスツルム・リューヴィル方程式，$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2}$ を考えてみよう．次のような固有関数系を持つ：

$$\phi_n(x) = \cos nx, \quad \mathcal{E}(n) = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.34}$$
$$= T_n(\cos x), \quad \phi_0(x) = 1, \tag{1.35}$$
$$(\phi_n, \phi_m) = \int_0^\pi \cos nx \cos mx\, dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n\,m}(1 + \delta_{n\,0}), \tag{1.36}$$
$$= \int_{-1}^1 T_n(\eta) T_m(\eta)(1 - \eta^2)^{-1/2} d\eta. \tag{1.37}$$

ここで $T_n(\cos x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \cos nx$ は $\cos x$ の n 次の直交多項式で，**第1種のチェビシェフ (Chebyshev) 多項式**と呼ばれる．固有関数は，自明に因子化されており (1.62)，$\eta(x) = \cos x$ は正弦的座標である．第1種および第2種のチェビシェフ多項式は，それぞれ，ヤコビ多項式の $\alpha = \beta = -1/2$, $\alpha = \beta = 1/2$ の特殊な場合である．ルジャンドル (Legendre) 多項式は，$\alpha = \beta = 0$ の場合になる．

因子化されたハミルトニアン $\mathcal{H} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ とその最初の随伴系 $\mathcal{H}^{[1]} = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger$ を一緒にした量子力学系を**超対称量子力学** (supersymmetric QM) と呼ぶことがある[11], [15]．これは幾分誤解を招きやすい言い方である．というのも，因子化されたハミルトニアンは全く一般的なもので，特別な対称性を意味しない．そして，固有値が等スペクトルであるのは，すべての随伴系について言えるのであって，最初の2つだけに制限される理由はない．また，この流れで s 番目と $s+1$ 番目の随伴ハミルトニアンを結ぶ変換のことを「超対称」(susy) 変換と呼び，また s 番目と $s+N$ 番目の随伴ハミルトニアンを結ぶ変換を「高階微分（非線形）超対称変換」あるいは「N 重超対称変換」と呼ぶこともある．これ

らは一般には（多重）ダルブー・クラム変換と呼ばれるものである．一般のダルブー変換は 1.5 節で議論する．

1.4 クラムの定理の拡張

クラムの定理は，元々のハミルトニアン $\mathcal{H}$ と固有関数系 $\{\phi_n(x)\}$ とから，最も低いエネルギー準位を次々と削除していくことによって，本質的に等スペクトルなハミルトン系を与えてゆく処方である．クライン (Krein)[16] およびアドラー (Adler)[17] によるクラムの定理の拡張は，後に述べる適当な条件 (1.45) を満たす相異なる非負の整数の集合 $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{d_1, d_2, \ldots, d_M\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^M$ によって指定された有限個の固有状態を削除することで得られる．一連の削除の後の新しい基底状態は，削除されずに残ったもののうちの最低エネルギーのもので，準位は次の形になる:

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n \,|\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \backslash \mathcal{D}\}. \tag{1.38}$$

クラムの定理によって固有状態を多数回削除した後のハミルトン系の形 (1.18) に対応して，新しい本質的に等スペクトルなハミルトン系は，

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}}^{\dagger} \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}} + \mathcal{E}(\mu), \quad \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}} \, \bar{\phi}_{\mathcal{D};\mu}(x) = 0, \tag{1.39}$$

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} \bar{\phi}_{\mathcal{D};n}(x) = \mathcal{E}(n) \bar{\phi}_{\mathcal{D};n}(x) \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \backslash \mathcal{D}), \tag{1.40}$$

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} = p^2 + \bar{U}_{\mathcal{D}}(x),$$

$$\bar{U}_{\mathcal{D}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} U(x) - 2\partial_x^2 \Big(\log \big| \mathrm{W}\,[\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \ldots, \phi_{d_M}](x) \big| \Big), \tag{1.41}$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x - \partial_x \bar{w}_{\mathcal{D}}(x), \quad \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}}^{\dagger} = -\partial_x - \partial_x \bar{w}_{\mathcal{D}}(x), \tag{1.42}$$

$$\bar{w}_{\mathcal{D}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log |\bar{\phi}_{\mathcal{D};\mu}(x)|,$$

$$\bar{\phi}_{\mathcal{D};n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{W}\,[\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_n](x)}{\mathrm{W}\,[\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \ldots, \phi_{d_M}](x)}, \tag{1.43}$$

で与えられる．新固有関数のノルムは

$$(\bar{\phi}_{\mathcal{D};n}, \bar{\phi}_{\mathcal{D};m}) = \prod_{j=1}^{M} \big(\mathcal{E}(n) - \mathcal{E}(d_j)\big) \cdot (\phi_n, \phi_m) \quad (n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \backslash \mathcal{D}), \tag{1.44}$$

となる．ハミルトニアン $\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}$ はその固有関数系 $\{\bar{\phi}_{\mathcal{D};n}(x)\}$ と同様に，添え字 $d_1, \ldots, d_M$ に関して対称であり，$\{d_j\}$ 達の順序に依存しないことを強調しよう．修正されたハミルトニアン $\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}$ の固有関数系 $\{\bar{\phi}_{\mathcal{D};n}(x)\}$ のノルム (1.44) の正値性を保証するためには，削除されるエネルギー順位 $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_M\}$ が，次の条件を満たすことが必要十分である:

$$\prod_{j=1}^{M} (m - d_j) \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{1.45}$$

固有スペクトルの単調増加性 (1.3) により，この条件は単に

$$\prod_{j=1}^{M}(\mathcal{E}(n)-\mathcal{E}(d_j))\geq 0,\quad \forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},$$

を表していて，$\mathcal{D}$ が隣り合った 2 個の整数の組 $\ell_1,\ell_1+1<\ell_2,\ell_2+1<\ell_3,\ell_3+1,\ldots$ からなる場合には常に満たされている．それ以外には，0 を含む任意個の続きの整数の組 $\{0,1,\ldots,M-1\}$ を含んでいてもよい．これは，正にクラムの定理の場合に当たり，この時は，ハミルトニアン，$\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}$ つまりポテンシャル $\bar{U}_{\mathcal{D}}(x)$ (1.41) が非特異になることは明らかである．

以下で $\mathcal{D}$ が隣り合った 1 組の整数である場合，$\mathcal{D}=\{b,b+1\}$ の場合に，ポテンシャル $U_b(x)$ (1.41)

$$U_b(x)\stackrel{\text{def}}{=}U(x)-2\partial_x^2\log|W_b(x)|,\ W_b(x)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{vmatrix}\phi_b & \phi_{b+1}\\ \phi_b' & \phi_{b+1}'\end{vmatrix}=\phi_b\phi_{b+1}'-\phi_b'\phi_{b+1},$$

が非特異になることを示そう[17]．この過程を繰り返せば，(1.45) を満たす一般の $\mathcal{D}$ についても，得られるポテンシャルが非特異であることが判る．

まず振動定理によって，固有関数 $\phi_s(\phi_{s+1})$ は s 個の（$s+1$ 個の）1 位の零点を内部 $(x_1<x<x_2)$ に持つ．そして ϕ_s と ϕ_{s+1} の零点は，互いに他を分離する．つまり，交互に現れる．$W_b(x)$ の導関数は，次の簡単な形を持つ：

$$W_b'(x)=\phi_b\phi_{b+1}''-\phi_b''\phi_{b+1}=(\mathcal{E}(b)-\mathcal{E}(b+1))\phi_b\phi_{b+1}.$$

議論を簡単にするために，次のように固有関数 $\{\phi_s\}$ の符号を定める:

$$\phi_s(x)\to +0,\quad \text{左の無限遠点（境界）},\quad s=0,1,2\ldots,$$

すると，$\mathcal{E}(b)-\mathcal{E}(b+1)<0$ だから，左の無限遠点（境界）付近で $W_b'(x)<0$. 従って，$W_b(x)$ の極小は $\phi_{b+1}(x)$ の零点（黒丸）で，極大は $\phi_b(x)$ の零点（白丸）で起こる．

$W_b(x)$ の各極大値が負であることを云えば，領域のすべての点で定符号（$W_b(x)<0$）が成り立つ．$\phi_b(x)$ の零点（白丸）上では，$W_b(x)=-\phi_b'(x)\phi_{b+1}(x)$. そして，一番左の極大点では，$\phi_b'(x)<0$, $\phi_{b+1}(x)<0\Rightarrow W_b(x)<0$. 次の極大に移ると，$\phi_b'$ および ϕ_{b+1} は，それぞれ符号を変えるから，再び $W_b(x)<0$. これが繰り返される．これで，$W_b(x)$ が領域のすべての点で定符号であることが示された．そしてこの時，付加ポテンシャルは，（境

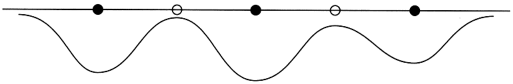


図 1.3　ロンスキアン $W_b(x)$ の定符号性．

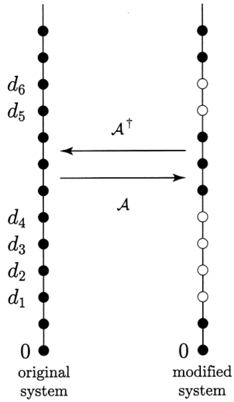


図 1.4　クライン・アドラー変換の一般的な形．黒い円はエネルギー準位を示し，白い円は削除されたエネルギー準位を表している．

界を除いて）非特異である．□

上の諸公式 (1.39)–(1.44) の代数的な導出は，本質的にクラムの定理の場合と同じである．図 1.4 にクライン・アドラー変換の概念図を示す．

厳密可解のハミルトンから出発して，クライン・アドラー変換によって無限に多くの厳密可解なハミルトニアンとその固有関数が得られる．しかし，元々の系が形状不変（第 2 章）であっても，得られた系は形状不変でなくなる．

1.4.1　特別な場合

この小節では，系のパラメタ $\boldsymbol{\lambda}$ 依存性が重要な内容になるので，形状不変性（第 2 章）をひとわたり読んでから戻ってきて欲しい．
連続した ℓ 個の整数 $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, \ell\}$ で指定される固有状態を削除する場合を扱う．前節で導入した公式の多くが，非常に簡単な形を取る．ℓ が偶数の時のみ，ハミルトニアンは非特異であるが，多くの代数的公式は ℓ の偶奇に依らず成り立つ．基底状態は元のままで，$\mu = 0$ である（(1.38)）．ポテンシャル (1.41) は，$\mathrm{W}[P_1, \ldots, P_\ell](\eta; \boldsymbol{\lambda})$ で決まる．これを評価して，η の ℓ 次の多項式 $\xi_\ell(\eta; \boldsymbol{\lambda})$ が得られる:

$$\mathrm{W}[P_1, \ldots, P_\ell](\eta; \boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{\ell} k!\, c_k(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \xi_\ell(\eta; \boldsymbol{\lambda}).$$

具体形は

$$\xi_\ell(\eta;\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}\frac{1}{2^\ell \ell!\,i^\ell}H_\ell(i\eta) & :\mathrm{H}\\ L_\ell^{(-g-\ell-\frac{1}{2})}(-\eta) & :\mathrm{L}\\ \frac{(-2)^\ell}{(g+h+1)_\ell}P_\ell^{(-g-\ell-\frac{1}{2},-h-\ell-\frac{1}{2})}(\eta) & :\mathrm{J}\end{cases}. \tag{1.46}$$

ここで，$(a)_k \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^n(a+k-1)$ はずらした階乗関数（(A.1) 参照），および $c_n(\boldsymbol{\lambda})$ は $P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ の最高次の係数で，

$$c_n(\boldsymbol{\lambda})=\ 2^n,\mathrm{H};\quad \frac{(-1)^n}{n!},\mathrm{L};\quad \frac{(n+g+h)_n}{2^n n!},\mathrm{J}.$$

固有関数は

$$\begin{aligned}
&\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})}{\xi_\ell\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\big)},\\
&\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})P_{\ell,n}\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\big),\\
&\mathrm{W}[P_1,\ldots,P_\ell,P_n](\eta;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{\ell} k!\,c_k(\boldsymbol{\lambda})\cdot(-1)^\ell P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\big(\Rightarrow P_{\ell,0}(\eta;\boldsymbol{\lambda})=1\big).
\end{aligned}$$

ここで，$P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ は，η の n 次の多項式で，$P_{0,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})=P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ である．$1\le n\le \ell$ については，$P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})=0$ で，$n<0$ に対しては，$P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})=0$ とする．偶数の ℓ の時，固有多項式 $P_{\ell,n}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})$ $(n\ge \ell+1)$ は，x の直交域内に $n-\ell$ 個の零点を持つ．演算子 $\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$,

$$\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}-\frac{d\log\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})}{dx},\quad \mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger=-\frac{d}{dx}-\frac{d\log\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})}{dx},$$

とが，変形された系 $\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ を，パラメタ $\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}$ を持つ形状不変な系 $\mathcal{H}'_\ell(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ と結び付ける．変形された系 $\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ の n 番目 $(n\ge\ell+1)$ の準位は，新しい形状不変な系 $\mathcal{H}'_\ell$ の $n-\ell-1$ 番目の準位と等スペクトルである:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})\propto\phi_{n-\ell-1}\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big),\\
&\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\phi_{n-\ell-1}\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big)\propto\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}).
\end{aligned}$$

偶数の ℓ の場合の直交関係式は $(n=0,\ n\ge\ell+1)$,

$$\int_{x_1}^{x_2}\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})^2\,P_{\ell,n}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})P_{\ell,m}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})dx=h_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})\delta_{nm},$$

$$h_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} (n-\ell)_\ell\,h_n(\boldsymbol{\lambda})\times\begin{cases}2^\ell & :\mathrm{H}\\ 1 & :\mathrm{L}\\ 4^{-\ell}(n+g+h+1)_\ell & :\mathrm{J}\end{cases}.$$

1.5　ダルブー変換

一般のダルブー変換には，1 次元の量子力学の種々の要請・制限は全く必要

ない．つまり，境界条件，因子化ハミルトニアン，自己共役性，ヒルベルト空間，2 乗可積分性等の条件は要求されないし，また保証もされない．シュレーディンガー型の方程式の**種解** (seed solutions) を用いて，同じ方程式の異なる解を，別のシュレーディンガー型方程式に属する解に等スペクトルで写す，つまり「エネルギー」を変えない．シュレーディンガー方程式 (1.1) のポテンシャル $U(x)$ は，複素数であってもかまわないし，種解 $\{\varphi_j(x)\}$ は，固有関数である必要もない．$\psi(x)$ と $\{\varphi_j(x), \tilde{\mathcal{E}}_j\}$ $(j = 1, \ldots, M)$ を，シュレーディンガー型の方程式の相異なる解としよう:

$$\mathcal{H}\psi(x) = \mathcal{E}\psi(x), \quad \mathcal{H}\varphi_j(x) = \tilde{\mathcal{E}}_j\varphi_j(x),\ \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, M. \tag{1.47}$$

一つの種解，例えば φ_1 を固定しよう．すると元のハミルトニアン $\mathcal{H}$ (1.1) は

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger \hat{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_1, \quad \hat{\mathcal{A}}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} - \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}$$

と表される．ここで，$\hat{\mathcal{A}}_1$ $(\hat{\mathcal{A}}_1^\dagger)$ は一般に，$\varphi_1(x)$ の零点で特異となる．クラムの定理の時と同様に，$\hat{\mathcal{A}}_1$ と $\hat{\mathcal{A}}_1^\dagger$ との順序を変えて新しいハミルトニアン $\mathcal{H}^{(1)}$ を定義しよう:

$$\mathcal{H}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_1 \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger + \tilde{\mathcal{E}}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + U^{(1)}(x),$$
$$U^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} U(x) - 2\frac{d^2 \log|\varphi_1(x)|}{dx^2}.$$

これも，一般に $\varphi_1(x)$ の零点で特異となる．絡み合わせ関係式 (1.12) および (1.9) から，次の新しい関数達

$$\psi^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_1\psi(x) = \frac{\mathrm{W}[\varphi_1, \psi](x)}{\varphi_1(x)} \equiv \frac{\varphi_1(x)\psi'(x) - \varphi_1'(x)\psi(x)}{\varphi_1(x)}, \tag{1.48}$$

$$\varphi_1^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varphi_1(x)}, \tag{1.49}$$

$$\varphi_k^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_1\varphi_k(x) = \frac{\mathrm{W}[\varphi_1, \varphi_k](x)}{\varphi_1(x)}, \quad k = 2, \ldots, M, \tag{1.50}$$

が，新しいポテンシャル $U^{(1)}(x)$ を持つシュレーディンガー型方程式の解になることが判る:

$$\mathcal{H}^{(1)}\psi^{(1)}(x) = \mathcal{E}\psi^{(1)}(x), \tag{1.51}$$

$$\mathcal{H}^{(1)}\varphi_j^{(1)}(x) = \tilde{\mathcal{E}}_j\varphi_j^{(1)}(x), \quad j = 1, \ldots, M. \tag{1.52}$$

これらの変換を M 回繰り返して，次の定理に到達する．

定理 1.2 (**Darboux**[13]) $\psi(x)$ が元のシュレーディンガー型の方程式

$$\mathcal{H}\psi(x) = \mathcal{E}\psi(x). \tag{1.53}$$

の解で，$\{\varphi_j(x), \tilde{\mathcal{E}}_j\}$ $(j=1,\ldots,M)$ が種解 (1.47) であるとしよう．次の関数達

$$\psi^{(M)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\varphi_M,\psi](x)}{\mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\varphi_M](x)}, \tag{1.54}$$

$$\varphi_j^{(M)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\breve{\varphi}_j,\ldots,\varphi_M](x)}{\mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\varphi_M](x)}, \quad j=1,\ldots,M, \tag{1.55}$$

が M 回変形されたシュレーディンガー型の方程式の元と同じエネルギーを持つ（等スペクトル）解になっている:

$$\mathcal{H}^{(M)}\psi^{(M)}(x) = \mathcal{E}\psi^{(M)}(x), \tag{1.56}$$

$$\mathcal{H}^{(M)}\varphi_j^{(M)}(x) = \tilde{\mathcal{E}}_j\varphi_j^{(M)}(x), \quad j=1,\ldots,M, \tag{1.57}$$

$$\mathcal{H}^{(M)} = -\frac{d^2}{dx^2} + U^{(M)}(x),$$

$$U^{(M)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} U(x) - 2\frac{d^2\log|\mathrm{W}[\varphi_1,\ldots,\varphi_M](x)|}{dx^2}. \tag{1.58}$$

ここで，(1.55) の中の $\breve{\varphi}_j$ は，ロンスキアンの中に $\varphi_j(x)$ が含まれないことを意味する．

ここでは，ポテンシャルの特異性や解の境界条件，2 乗可積分性などには全く触れていないことに注意して欲しい．ダルブー変換を 1-d QM に応用する場合には，種解に種々の要請を課すことによって非特異なポテンシャル $U^{(M)}(x)$ が得られるように工夫することになる．クラム変換は，種解として固有関数 $\varphi_j=\phi_{j-1}$, $j=1,\ldots,M$ を取ったものであり，クライン・アドラー変換は $\varphi_j=\phi_{d_j}$, $j=1,\ldots,M$ にあたる．

1.6 3 つの可解ポテンシャル

ここでは，よく知られた厳密可解ポテンシャルの具体例を 3 つ挙げよう．プレポテンシャル $w(x)$ がハミルトニアンのポテンシャル $U(x)$ を決めることは前に述べた（(1.7)):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}:\quad w(x) = -\tfrac{1}{2}x^2, \quad \phi_0(x) = e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty,\\
&\qquad \text{調和振動子:}\quad U(x) = x^2-1, \quad \eta(x) = x,
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}:\quad w(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + g\log x, \quad \phi_0(x;g) = e^{-x^2/2}x^g,\\
&\qquad \text{遠心力付きの振動子:}\quad U(x) = x^2 + \frac{g(g-1)}{x^2} - 1 - 2g,\\
&\qquad\qquad \eta(x) = x^2, \quad g > \tfrac{1}{2}, \quad 0 < x < \infty,
\end{aligned} \tag{1.60}$$

$$\mathrm{J}:\quad w(x) = g\log\sin x + h\log\cos x, \ \phi_0(x;g,h) = (\sin x)^g(\cos x)^h,$$

$$\text{ポッシェル・テラー:}\quad U(x)=\frac{g(g-1)}{\sin^2 x}+\frac{h(h-1)}{\cos^2 x}-(g+h)^2,$$
$$\eta(x)=\cos 2x,\quad g>\tfrac{1}{2},\ h>\tfrac{1}{2},\ 0<x<\tfrac{\pi}{2}. \tag{1.61}$$

ここで，g および h は系のパラメタであり，結合定数と呼ばれることもある．これらの固有関数は基底状態の固有関数 $\phi_0(x)$ と多項式に**因子化**されている:

$$\phi_n(x)=\phi_0(x)P_n(\eta(x)),\quad \phi_0(x)=e^{w(x)}, \tag{1.62}$$

ここで $P_n(\eta(x))$ は，**正弦的座標** (sinusoidal coordinate) $\eta(x)$ の n 次の多項式である．上の 3 つの例に関しては，それぞれが**古典直交多項式** (Classical orthogonal polynomials) であり，エルミート (H:Hermite)，ラゲール (L:Laguerre) およびヤコビ (J:Jacobi) 多項式である．記号に関しては，付録 A 参照.

$$\text{H}:\quad P_n(\eta(x))=H_n(x)\stackrel{\text{def}}{=}(2x)^n\,{}_2F_0\Bigl(\begin{matrix}-\frac{n}{2},\,-\frac{n-1}{2}\\ -\end{matrix}\Bigm|-\frac{1}{x^2}\Bigr), \tag{1.63}$$
$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},$$
$$\text{L}:\quad P_n(\eta(x))=L_n^{(g-\frac{1}{2})}(x^2)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{(g+\frac{1}{2})_n}{n!}\,{}_1F_1\Bigl(\begin{matrix}-n\\ g+\frac{1}{2}\end{matrix}\Bigm|x^2\Bigr), \tag{1.64}$$
$$=\frac{(g+\frac{1}{2})_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(g+\frac{1}{2})_k}\frac{x^{2k}}{k!},$$
$$\text{J}:\quad P_n(\eta(x))=P_n^{(g-\frac{1}{2},h-\frac{1}{2})}(\cos 2x)$$
$$\stackrel{\text{def}}{=}\frac{(g+\frac{1}{2})_n}{n!}\,{}_2F_1\Bigl(\begin{matrix}-n,n+g+h\\ g+\frac{1}{2}\end{matrix}\Bigm|\frac{1-\cos 2x}{2}\Bigr), \tag{1.65}$$
$$=\frac{(g+\frac{1}{2})_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+g+h)_k}{(g+\frac{1}{2})_k}\frac{(1-\cos 2x)^k}{2^k k!}.$$

ここで，$[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．また，$(a)_k\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{k=1}^{n}(a+k-1)$ は，ずらした階乗関数である（(A.1) 参照).

ハミルトニアンを基底状態固有関数 $\phi_0(x)$ で相似変換したもの $\widetilde{\mathcal{H}}$ が，多項式 $P_n(\eta(x))$ の 2 階の微分方程式を与える:

$$\widetilde{\mathcal{H}}P_n(\eta(x))=\mathcal{E}(n)P_n(\eta(x)), \tag{1.66}$$
$$\widetilde{\mathcal{H}}\stackrel{\text{def}}{=}\phi_0(x)^{-1}\circ\mathcal{H}\circ\phi_0(x)=-\frac{d^2}{dx^2}-2\frac{dw(x)}{dx}\frac{d}{dx}. \tag{1.67}$$

ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の可解性は，$\eta(x)$ で張られた基底

$$1,\ \eta(x),\ \eta(x)^2,\ \ldots,\eta(x)^n,\ \ldots,$$

での相似変換した $\widetilde{\mathcal{H}}$ の**三角性** (triangularity) として言い換えることができる:

$$\widetilde{\mathcal{H}}\eta(x)^n = \mathcal{E}(n)\eta(x)^n + \eta(x) \text{ の低次の多項式}, \tag{1.68}$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_n, \quad \mathcal{V}_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\big[1, \eta(x), \ldots, \eta(x)^n\big]. \tag{1.69}$$

構成から自明であるように，基底状態固有関数の 2 乗 $\phi_0(x)^2 = e^{2w(x)}$ が，多項式達の正定値な直交重み関数になる:

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi_0(x)^2 P_n(\eta(x)) P_n(\eta(x)) dx = h_n \delta_{nm},$$

$$h_n = \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi} & : \mathrm{H} \\ \frac{1}{2\,n!}\,\Gamma(n+g+\frac{1}{2}) & : \mathrm{L} \\ \dfrac{\Gamma(n+g+\frac{1}{2})\Gamma(n+h+\frac{1}{2})}{2\,n!\,(2n+g+h)\Gamma(n+g+h)} & : \mathrm{J} \end{cases} . \tag{1.70}$$

ここで，直交重み関数を与える $\phi_0(x)$ は，1 階の微分方程式 (1.8) の解として得られることを強調しておこう．次章（第 2 章）において，上の結果 (1.59)–(1.70) を**形状不変性**から導く．

この 3 つの例をもう少し詳しく見てみよう．H では，相似変換した $\widetilde{\mathcal{H}}$ は

$$\widetilde{\mathcal{H}} = -\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx},$$

となり，単純な多項式基底 $\{1, x, \ldots, x^n\}$ での三角性は自明で，$\mathcal{E}(n) = 2n$ が判る．この演算子が，エルミート多項式 $H_n(x)$ を規定する:

$$\widetilde{\mathcal{H}}H_n(x) = 2nH_n(x) \ \Rightarrow H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0. \tag{1.71}$$

この方程式を低次の n について解くのはたやすい．

L の相似変換した $\widetilde{\mathcal{H}}$ は

$$\widetilde{\mathcal{H}} = -\frac{d^2}{dx^2} + 2(x - \frac{g}{x})\frac{d}{dx}.$$

単純な多項式基底 $\{1, x, \ldots, x^n\}$ が，$\widetilde{\mathcal{H}}$ で不変でないことは，$\widetilde{\mathcal{H}}x = 2(x - g/x)$ から判る．新しい独立変数 $y \stackrel{\text{def}}{=} x^2$ を導入すると，この微分演算子は

$$\widetilde{\mathcal{H}} = -4y\frac{d^2}{dy^2} - 4(\alpha + 1 - y)\frac{d}{dy}, \qquad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} g - \frac{1}{2},$$

と書き直される．新しい基底 $\{1, y, \ldots, y^n\}$ での $\widetilde{\mathcal{H}}$ の三角性 (1.68) は自明で，$\mathcal{E}(n) = 4n$ が判る．この演算子が，ラゲール多項式 $\{L_n^{(\alpha)}(y)\}$ を規定する:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathcal{H}}L_n^{(\alpha)}(y) = 4n\,L_n^{(\alpha)}(y) \\ &\qquad \Rightarrow xL_n^{(\alpha)\,\prime\prime}(x) + (\alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)\,\prime}(x) + n\,L_n^{(\alpha)}(x) = 0. \end{aligned} \tag{1.72}$$

J の相似変換した $\widetilde{\mathcal{H}}$ は

$$\widetilde{\mathcal{H}} = -\frac{d^2}{dx^2} - 2(g\cot x - h\tan x)\frac{d}{dx} = -\frac{d^2}{dx^2} - 2\left(g\frac{\cos x}{\sin x} - h\frac{\sin x}{\cos x}\right)\frac{d}{dx}.$$

この分母に $\sin x$ と $\cos x$ があることから，導関数が $\eta'(x) \propto \sin x \cos x$ となる正弦的座標 $\eta(x)$ が予想される．最も簡単なのは，$\eta(x) = \cos 2x$ で，$y \stackrel{\text{def}}{=} \cos 2x$ と独立変数変換をすると演算子 $\widetilde{\mathcal{H}}$ は

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}} &= -4(1-y^2)\frac{d^2}{dy^2} + 4\left(g-h+(g+h+1)y\right)\frac{d}{dy}, \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} g-\tfrac{1}{2},\\ &= -4(1-y^2)\frac{d^2}{dy^2} + 4\left(\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)y\right)\frac{d}{dy}, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} h-\tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

のように書き換えられる．新しい基底 $\{1, y, \ldots, y^n\}$ での $\widetilde{\mathcal{H}}$ の三角性 (1.68) は自明で，$\mathcal{E}(n) = 4n(n+g+h) = 4n(n+\alpha+\beta+1)$ が判る．この演算子が，ヤコビ多項式 $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(y)\}$ を規定する:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{H}}P_n^{(\alpha,\beta)}(y) = 4n(n+\alpha+\beta+1)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(y)\\ &\qquad\qquad\Downarrow \qquad y \Rightarrow x\\ &(1-x^2)P_n^{(\alpha,\beta)\prime\prime}(x) + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x)\\ &\qquad\qquad + n(n+\alpha+\beta+1)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0. \qquad (1.73)\end{aligned}$$

最後に，1.3.1 節で扱った無限に深いポテンシャル井戸の場合を見てみよう．これは，色々の意味で非常に興味深い．ポテンシャル関数 $U(x)$ は恒等的に -1 $(0 < x < \pi)$ であるが，無限に深い井戸であるために，$w(x) = \log \sin x$ (1.28) となり，これが非自明な $\widetilde{\mathcal{H}}$ を与える:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = -\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{\cos x}{\sin x}\frac{d}{dx}.$$

この形から，$\eta(x) = \cos x$ が予想される．$y = \cos x$ を新しい独立変数に取ると

$$\widetilde{\mathcal{H}} = -(1-y^2)\frac{d^2}{dy^2} + 3y\frac{d}{dy}$$

となり，新しい基底 $\{1, y, \ldots, y^n\}$ での $\widetilde{\mathcal{H}}$ の三角性 (1.68) は自明で，$\mathcal{E}(n) = n(n+2)$ (1.30) が判る．対応する第 2 種のチェビシェフ多項式 $z = U_n(y)$ (1.31) の満たす方程式が

$$-(1-y^2)z'' + 3yz' = n(n+2)z$$

となり，これが上のヤコビ多項式 (1.73) の $\alpha = \beta = 1/2$ の場合にあたることが判る．

1.6.1 確定特異点

有理型関数 $f(x)$, $g(x)$ を係数に持つ 2 階の微分方程式

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0, \qquad (*)$$

の正則性および特異性に関して，初等的な解説をしよう[18]．係数関数の正則点

x_0,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (x - x_0)^n, \quad g(x) = g(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (x - x_0)^n,$$

においては，その点の近傍での一般解はテイラー展開

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n,$$

で与えられる．ここで，C_0 と C_1 は任意で，残りの係数 $\{C_n\}$ $n = 2, \ldots$ は，方程式に代入して，順次決められる．もし，ある点 x_0 で，$f(x)$ が単純極を持ち，同じ点で $g(x)$ が 2 次までの極を持つ

$$f(x) = \frac{\alpha}{x - x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n,$$

$$g(x) = \frac{\beta}{(x - x_0)^2} + \frac{\gamma}{x - x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - x_0)^n,$$

場合，その点 x_0 は**確定特異点** (regular singular point) と呼ばれる．確定特異点の近傍においては，上の方程式 $(*)$ は 2 つの独立な局所解を持つ：

$$y^{(j)}(x) = (x - x_0)^{\rho_j} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(j)} (x - x_0)^n \right), \quad j = 1, 2.$$

ここで，ρ_1 と ρ_2 は，次の 2 次方程式

$$\rho(\rho - 1) + \alpha\rho + \beta = 0,$$

の根で，**特性指数** (characteristic exponent) と呼ばれる．残りの係数 $\{C_n^{(j)}\}$, $n = 1, \ldots$ は，方程式から，順次決定される．それぞれの解の確定特異点での**モノドロミー** (monodromy) は特性指数で決定される：

$$M_\rho = e^{2\pi i \rho}. \tag{1.74}$$

特性指数の差が整数 $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$ の場合には，上の 2 つの解が線形従属になる場合がある．その時には，$\log(x - x_0)$ を含めた修正が必要になる[18]．もし，すべての特異点が確定特異点である場合には，上の方程式 $(*)$ は，**フックス型** (Fuchsian) 微分方程式と呼ばれる．

上の例のポテンシャル (1.59)–(1.61) から決まるシュレーディンガー方程式では，L の $x = 0$ および J の $x = 0$ と $x = \pi/2$ は確定特異点で，そこでの特性指数は

$$\text{L}: \quad \rho = g,\ 1 - g \quad \text{at } x = 0, \tag{1.75}$$

$$\text{J}: \quad \rho = g,\ 1 - g \quad \text{at } x = 0; \quad \rho = h,\ 1 - h \quad \text{at } x = \pi/2. \tag{1.76}$$

H のシュレーディンガー方程式の $x=\pm\infty$ および，L のシュレーディンガー方程式の $x=+\infty$ は，不確定特異点と呼ばれる．上記以外の内部点は，すべて正則点である．

遠心力付きの振動子ポテンシャル (1.60) およびポッシェル・テラー (Pöschl-Teller) ポテンシャル (1.61) の定数部分 $(-(1+2g), -(g+h)^2)$ を除いたものは，次の**離散対称性変換**に関して不変である:

$$\text{L:}\quad g \leftrightarrow 1-g\ ;\quad \text{J:}\quad g \leftrightarrow 1-g \text{ and/or } \ h \leftrightarrow 1-h. \tag{1.77}$$

これはまた，各確定特異点での特性指数 (1.75), (1.76) を入れ替える．

同様に，定数項を除いた H および L のハミルトニアンは，座標の離散変換 $x \to ix$ に関して，符号を変える:

$$\mathcal{H}_h \to -\mathcal{H}_h,\quad \mathcal{H}_h \stackrel{\text{def}}{=} -\partial_x^2 + x^2, \tag{1.78}$$

$$\mathcal{H}_r \to -\mathcal{H}_r,\quad \mathcal{H}_r \stackrel{\text{def}}{=} -\partial_x^2 + x^2 + \frac{g(g-1)}{x^2}. \tag{1.79}$$

これらの離散対称性変換 (1.77)–(1.79) は，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の段階でのもので，固有多項式系の段階 $\widetilde{\mathcal{H}}$ では成り立たない．つまり，離散対称性変換 (1.77)–(1.79) を作用させると，固有関数は，2 乗可積分性を失うことになる．しかし，シュレーディンガー方程式の解を解に写すので，第 4 章で，新しい直交多項式を作るための種解（仮想状態解等）の生成に使われる．（次節の具体例および 4.1.1 節，4.1.2 節参照.）云い換えると，H, L, J の多項式の満たす方程式 (A.12)–(A.14) は，これらの離散対称性を持たないので，変形のための出発点としては適さない．

1.7 ダルブー変換等の具体例

前節で導入した，いくつかの完全可解ハミルトニアン系の例を用いて，固有関数を用いたクラムの定理の拡張および，離散対称性変換で得られた種解を用いたダルブー変換の具体例をいくつか見てみよう．

1.7.1 具体例：クラムの定理の拡張

H: 調和振動子，$\mathcal{D}=\{1,2\}$

固有関数 $\phi_n(x)=\phi_0(x)H_n(x)$ は，エルミート多項式 $H_n(x)$ と基底状態 $\phi_0(x)=e^{-x^2/2}$ に依る．対応する多項式は，$H_1(x)=2x$, $H_2(x)=4x^2-2$ で，そのロンスキアンは $\mathrm{W}[\phi_1,\phi_2](x)=e^{-x^2}\mathrm{W}[H_1,H_2](x)=4e^{-x^2}(2x^2+1)$. 公式 (1.41) から，非特異なポテンシャルが得られる[17]:

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 + 2\partial_x^2(x^2) - 2\partial_x^2 \log(2x^2+1)$$

$$= -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 3 + \frac{32x^2}{(2x^2+1)^2} - \frac{8}{2x^2+1}. \tag{1.80}$$

純虚数の $x = \pm i/\sqrt{2}$ に特性指数 $(-1, 2)$ の確定特異点が加わった．固有関数は多項式型の

$$\bar{\phi}_{\mathcal{D},n}(x) = \frac{\phi_0(x)\mathrm{W}[H_1, H_2, H_n](x)}{4(2x^2+1)}, \quad \mathcal{E}(n) = 2n, \tag{1.81}$$

である．興味深いことに，$\mathrm{W}[H_1, H_2](x) \propto H_2(ix)$ や，更に一般的に

$$\mathrm{W}[H_1, H_2, \ldots, H_\ell](x) \propto H_\ell(ix), \tag{1.82}$$

が成り立つ．(1.46) 参照．

L: 遠心力付きの振動子，$\mathcal{D} = \{1, 2\}$

固有関数 $\phi_n(x) = \phi_0(x)L_n^{(\alpha)}(x^2)$ は，ラゲール多項式 $L_n^{(\alpha)}(x^2)$ と基底状態 $\phi_0(x) = e^{-x^2/2}x^g$ に依る．簡単化した記法 $P_n(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} L_n^{(g-1/2)}(\eta)$ で，対応する多項式は $P_1(\eta) = -\eta + g + 1/2$, $P_2(\eta) = (4\eta^2 - 4(2g+3)\eta + (2g+1)(2g+3))/8$. ロンスキアン

$$\mathrm{W}[P_1, P_2](\eta) = (-4\eta^2 + 4(2g+1)\eta - (2g+1)(2g+3))/8, \tag{1.83}$$

は，η の 2 次式で，負の判別式を持ち実の η では定符号である．固有関数は多項式型の

$$\bar{\phi}_{\mathcal{D},n}(x) = 4\frac{\phi_0(x)x^2\mathrm{W}[P_1, P_2, P_n](\eta)}{\mathrm{W}[P_1, P_2](\eta)}, \tag{1.84}$$

となる．次の関係が興味深い（(1.46) 参照）:

$$\mathrm{W}[P_1, P_2](\eta) \propto L_2^{(-g-2-1/2)}(-\eta) = L_2^{(1-(g+3)-1/2)}(-\eta), \tag{1.85}$$

$$\mathrm{W}[P_1, P_2, \ldots, P_\ell](\eta) \propto L_\ell^{(1-(g+\ell+1)-1/2)}(-\eta). \tag{1.86}$$

1.7.2　具体例：ダルブー変換

H: 調和振動子，$\tilde{\phi}_\ell(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_\ell(ix)$

調和振動子のハミルトニアンの離散対称性 $x \to ix$ (1.78) によって生成された種解 $\tilde{\phi}_\ell(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_\ell(ix)$ が役に立つ．$\varphi_1(x) = \tilde{\phi}_2(x) = e^{x^2/2}2(2x^2+1)$ を使ってダルブー変換を行おう．これは，負のエネルギー $\mathcal{E}(-3) = -6$ を持ち，その逆数 $1/\varphi_1(x)$ が 2 乗可積分なので，新しい固有状態が元の系の -3 番目の準位に生成される（(1.52)）．新しいハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(1)} &= -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 - 2\partial_x^2 \log \varphi_1(x) \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 3 + \frac{32x^2}{(2x^2+1)^2} - \frac{8}{2x^2+1},\end{aligned} \tag{1.87}$$

となり，これはクラムの定理の拡張の時の例 (1.80) と同じものである．基底状

態のエネルギーの差 -6 は調節が必要だが．新しい固有関数は

$$\begin{aligned}\phi_n^{(1)}(x) &= \phi_0(x)\frac{\mathrm{W}[\tilde{\phi}_2, \phi_n](x)}{2(2x^2+1)} \\ &= \phi_0(x)\frac{\mathrm{W}[e^{x^2/2}(2x^2+1), e^{-x^2/2}H_n](x)}{(2x^2+1)}.\end{aligned} \tag{1.88}$$

これは，(1.81) の $n+3$ 番目の固有状態にあたる．つまり，恒等式[46]

$$\mathrm{W}[e^{x^2/2}(2x^2+1), e^{-x^2/2}H_n](x) \propto \mathrm{W}[H_1, H_2, H_{n+3}](x), \tag{1.89}$$

が成り立つ．

L: 遠心力付きの振動子

この系の持つ 2 つの離散対称性変換 (1.77), (1.79) を固有関数に作用させた種解 $\tilde{\phi}_\ell(x) \propto \phi_\ell(ix)|_{g\to 1-g}$ を考えよう：

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_\ell(x) &\stackrel{\text{def}}{=} e^{x^2/2}x^{1-g}L_\ell^{(-g+1/2)}(-x^2), \\ \mathcal{H}\tilde{\phi}_\ell(x) &= -4(\ell+1)\tilde{\phi}_\ell(x) = \mathcal{E}(-(\ell+1))\tilde{\phi}_\ell(x).\end{aligned}$$

負のエネルギー，$\mathcal{E}(-3) = -12$ を持つ 2 番目の種解 ($\ell = 2$)

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_2(x) &\stackrel{\text{def}}{=} e^{x^2/2}x^{1-g}L_2^{(-g+1/2)}(-\eta) \\ &= e^{x^2/2}x^{1-g}\left(4\eta^2 - 4(2g-5)\eta + (2g-5)(2g-3)\right)/8,\end{aligned}$$

を使う．多項式 $L_2^{(-g+1/2)}(-\eta)$ は，η の 2 次式で，$g > 5/2$ で負の判別式を持つので，すべての実の η について正であり，非特異なポテンシャルを生成する．前に得られた (1.85) 関係式

$$\mathrm{W}[P_1, P_2](\eta) \text{ in } (1.83)|_{g\to g-3} = -L_2^{(-g+1/2)}(-\eta),$$

を考慮すると，以前の例 1.7.1 節のポテンシャルは，今度のポテンシャルにおいてパラメタずらし $g \to g-3$ で得られる．固有関数は

$$\begin{aligned}\phi_n^{(1)}(x) &= \frac{\mathrm{W}[e^{x^2/2}x^{1-g}L_2^{(-g+1/2)}(-\eta), e^{-x^2/2}x^g L_n^{(g-1/2)}(\eta)](x)}{e^{x^2/2}x^{1-g}L_2^{(-g+1/2)}(-\eta)} \\ &= \frac{e^{-x^2/2}x^{g-1}}{L_2^{(-g+1/2)}(-\eta)}\left\{L_2^{(-g+1/2)}(-\eta)L_n^{(g-1/2)}(\eta)(-2\eta+2g-1)\right. \\ &\qquad \left. + 2\eta\mathrm{W}[L_2^{(-g+1/2)}(-\eta), L_n^{(g-1/2)}(\eta)](\eta)\right\},\end{aligned}$$

となる．これは，以前の例 1.7.1 節の固有関数 (1.84) で $g \to g-3$ と $n \to n+3$ としたものになっている．このことから，次の恒等式が得られる：

$$\begin{aligned}&L_2^{(-g+1/2)}(-\eta)L_n^{(g-1/2)}(\eta)(-2\eta+2g-1) \\ &\qquad\qquad + 2\eta\mathrm{W}[L_2^{(-g+1/2)}(-\eta), L_n^{(g-1/2)}(\eta)](\eta) \\ &\qquad \propto \mathrm{W}[\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_{n+3}](\eta), \qquad \tilde{P}_n(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} L_n^{(g-3-1/2)}(\eta).\end{aligned} \tag{1.90}$$

第 2 章

形状不変性：可解性の十分条件

形状不変性 (shape invariance)[19]は，シュレーディンガー描像での厳密可解性の十分条件である．クラムの定理[14]と組み合わせて，形状不変性から，離散固有値の全体 (2.2) とそれに対応する固有関数 (2.3) を明示的に計算することができる．同じことであるが，因子化ハミルトニアンの方法[10]，あるいは超対称性量子力学の方法[11], [20]と組み合わせると言ってもよい．

2.1　固有値・固有関数の決定，ロドリーグの公式

多くの場合ハミルトニアンはいくつかのパラメタ $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ を含む．種々の量のパラメタ依存性がこの章の主題なので，記号的に因子化ハミルトニアン (1.11) を $\mathcal{H}^{[0]}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$, 固有値，固有関数などを $\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})$, $\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$, $P_n(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})$ 等と表すことにする．形状不変性の条件は，適当に選んだパラメタの組について

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger=\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^\dagger\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})+\mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}), \tag{2.1}$$

が成り立つことである．ここで，$\boldsymbol{\delta}$ はパラメタのずらし (shift) である．言い換えると，$\mathcal{H}^{[0]}(\boldsymbol{\lambda})$ (1.5) と $\mathcal{H}^{[1]}(\boldsymbol{\lambda})-\mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda})$ (1.13) が，同じ形を持ち，ただパラメタを $\boldsymbol{\delta}$ だけずらしたものになっていると言うことである．またこれは，(1.13), (1.14) で定義した $\mathcal{A}^{[1]}(\boldsymbol{\lambda})$, $\mathcal{A}^{[s]}(\boldsymbol{\lambda})$ が，$\mathcal{A}^{[1]}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$, $\mathcal{A}^{[s]}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+s\boldsymbol{\delta})$ となっていることを意味する．更には，1.3 節で導入したクラムの定理の s 番目のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[s]}$(1.14) は，$\mathcal{H}^{[s]}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}+s\boldsymbol{\delta})+\mathcal{E}(s;\boldsymbol{\lambda})$ と書けることになる．これより，エネルギースペクトルと励起状態の固有関数とが，基底状態の固有関数 $\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})$ と第 1 励起状態のエネルギー $\mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda})$ によって次のように表される[20]:

$$\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=\sum_{s=0}^{n-1}\mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}^{[s]}),\qquad \boldsymbol{\lambda}^{[s]}\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{\lambda}+s\boldsymbol{\delta}, \tag{2.2}$$

$$\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})\propto\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}^{[0]})^\dagger\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}^{[1]})^\dagger\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}^{[2]})^\dagger\cdots\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}^{[n-1]})^\dagger\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}^{[n]}). \tag{2.3}$$

ここで，$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ は，$\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})$ で表されること (1.6) を思い起こそう．上の固有関数 $\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ の公式 (2.3) は，**古典直交多項式の普遍的なロドリーグ公式** (universal Rodrigues formula for the classical orthogonal polynomials) と見なすことができる．各多項式のロドリーグ公式の明示的な形を得るためには，演算子 $\mathcal{A}^\dagger(\boldsymbol{\lambda})$(2.22) と基底状態の固有関数 $\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})$ のデータがあればよい．

例えばモース (Morse) ポテンシャル（2.3.4 節）のように，離散固有状態が有限個しか存在しない系の場合には，エネルギー固有値はある適当な N で最大値 $\mathcal{E}(N;\boldsymbol{\lambda})$ を持つ．それ以上の n では，公式 (2.2) は使えなくなり，ロドリーグ公式 (2.3) は 2 乗可積分でない波動関数を与える．しかしながら，波動関数 $\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ $(n>N)$ は，エネルギー $\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})$ のシュレーディンガー方程式を満たす．

上の形状不変性の条件 (2.1) は微分演算子の間の関係式であるが，プレポテンシャル $w(x;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \log\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})$(1.6) のパラメタ $\boldsymbol{\lambda}$ 依存性の 1 個の関係式として書き直せる:

$$\begin{aligned}&\big(\partial_x w(x;\boldsymbol{\lambda})\big)^2-\partial_x^2 w(x;\boldsymbol{\lambda})\\&\qquad=\big(\partial_x w(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\big)^2+\partial_x^2 w(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})+\mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned}\tag{2.4}$$

1.6 節で導入した 3 つの完全可解ポテンシャルの例 (1.59)–(1.61) について形状不変性の条件 (2.4) が成り立っていることを見るのはたやすい:

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}: \text{パラメタ無し，}\quad \mathcal{A}=\partial_x+x,\quad w(x)=-x^2/2,\\&\quad(-x)^2-(-1)=(-x)^2+(-1)+\mathcal{E}(1),\ \mathcal{E}(1)=2\Rightarrow\mathcal{E}(n)=2n,\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{L}: \boldsymbol{\lambda}=g,\quad \boldsymbol{\delta}=1,\quad \mathcal{A}(g)=\partial_x+x-g/x,\\&\qquad\qquad w(x)=-x^2/2+g\log x,\\&\Big(-x+\frac{g}{x}\Big)^2-\Big(-1-\frac{g}{x^2}\Big)\\&\qquad=\Big(-x+\frac{g+\delta}{x}\Big)^2+\Big(-1-\frac{g+\delta}{x^2}\Big)+\mathcal{E}(1),\\&\qquad\qquad \delta=1,\ \ \mathcal{E}(1)=4\ \ \Rightarrow\mathcal{E}(n)=4n,\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{J}: \boldsymbol{\lambda}=(g,h),\quad \boldsymbol{\delta}=(1,1),\quad \mathcal{A}(g,h)=\partial_x-g\cot x+h\tan x,\\&\quad(g\cot x-h\tan x)^2-\Big(-\frac{g}{\sin^2 x}-\frac{h}{\cos^2 x}\Big)\\&\quad=((g+\delta_1)\cot x-(h+\delta_2)\tan x)^2+\Big(-\frac{g+\delta_1}{\sin^2 x}-\frac{h+\delta_2}{\cos^2 x}\Big)+\mathcal{E}(1),\\&\quad\delta_1=\delta_2=1,\ \mathcal{E}(1)=4(g+h+1)\ \ \Rightarrow\mathcal{E}(n;g,h)=4n(n+g+h).\end{aligned}\tag{2.7}$$

L, J についての形状不変な変換 $\boldsymbol{\lambda}\to\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}$, $\mathcal{H}^{[s]}\to\mathcal{H}^{[s+1]}$，つまり，$g\to g+1$,

$h \to h+1$ は，確定特異点でのモノドロミー保存 (monodromy preserving) (1.74) になっていることを強調しよう．

調和振動子 (H) については，普遍ロドリーグ公式は

$$e^{-x^2/2}P_n(\eta) \propto (-\partial_x + x)^n e^{-x^2/2}$$

となる．関係式 $\partial_x - x = e^{x^2/2} \circ \frac{d}{dx} \circ e^{-x^2/2}$ を使うと，$P_n(\eta) \propto (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$ となり，これはエルミート多項式のロドリーグ公式 (A.15) になっている．遠心力付きの振動子 (L) の不変ロドリーグ公式は

$$e^{-x^2/2}x^g P_n(\eta) \propto (-\partial_x + x - \frac{g}{x}) \cdots (-\partial_x + x - \frac{g+n-1}{x})e^{-x^2/2}x^{g+n}.$$

関係式 $(\eta = x^2)$

$$-\partial_x + x - \frac{g}{x} = -e^{x^2/2}x^{-g} \circ \frac{d}{dx} \circ e^{-x^2/2}x^g = -2e^{\eta/2}\eta^{-(g-1)/2} \circ \frac{d}{d\eta} \circ e^{-\eta/2}\eta^{g/2},$$

を使うと，この式は

$$P_n(\eta) \propto (-2)^n e^{\eta}\eta^{-g+1/2}\left(\frac{d}{d\eta}\right)^n \left(e^{-\eta}\eta^{n+g-1/2}\right),$$

となり，ラゲール多項式のロドリーグ公式 (A.16) になっている．n に依存した係数は，固有関数という性質だけからは決まらない．ヤコビ多項式 (J) については $\mathcal{A}^\dagger$ は $(\eta = \cos 2x)$,

$$\begin{aligned}
-\mathcal{A}^\dagger(\boldsymbol{\lambda}) &= \frac{d}{dx} + \partial_x w(x;\boldsymbol{\lambda}) = \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ \frac{d}{dx} \circ \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) \\
&= -4\sin x\cos x\,\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ \frac{d}{d\eta} \circ \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) \\
&= -4\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\delta})^{-1} \circ \frac{d}{d\eta} \circ \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}$$

である．実際これは,

$$\begin{aligned}
P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}) &\propto (-4)^n \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\delta})^{-1} \\
&\qquad \times \left(\frac{d}{d\eta}\right)^n \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+(n-1)\boldsymbol{\delta})\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+n\boldsymbol{\delta})
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta) \propto \frac{1}{(1-\eta)^\alpha(1+\eta)^\beta}\left(\frac{d}{d\eta}\right)^n \left((1-\eta)^{\alpha+n}(1+\eta)^{\beta+n}\right),$$

ヤコビ多項式のロドリーグ公式 (A.17) になっている．

2.2 前方・後方ずらし演算子具体例

形状不変性とクラムの定理を組み合わせると，$\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ と $\phi_{n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$

とが，$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ によって結ばれていることが判る:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda}) = f_n(\boldsymbol{\lambda})\phi_{n-1}\big(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}\big), \tag{2.8}$$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\phi_{n-1}\big(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}\big) = b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.9}$$

ここで，定数 $f_n(\boldsymbol{\lambda})$ と $b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})$ とは，各多項式 $\{P_n(x;\boldsymbol{\lambda})\}$ の各次の具体的な係数に依存するが，その積はエネルギー固有値で決まっている:

$$\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) = f_n(\boldsymbol{\lambda})b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.10}$$

H, L, J の各々の $\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ と $P_n(\eta(x))$ は，前章 1.6 節の (1.63)–(1.65) に与えたので，$f_n(\boldsymbol{\lambda})$ と $b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})$ は，次のように決まる:

$$f_n(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} 2n & : \mathrm{H} \\ -2 & : \mathrm{L} \\ -2(n+g+h) & : \mathrm{J} \end{cases}, \quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} 1 & : \mathrm{H} \\ -2n & : \mathrm{L,\ J} \end{cases}. \tag{2.11}$$

実際に適用してみると

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}: \mathcal{A}\phi_0(x)H_n(x) &= e^{-x^2/2}H_n'(x), \qquad H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x),\\
&= 2n\,e^{-x^2/2}H_{n-1}(x) = 2n\phi_{n-1}(x), \quad \Rightarrow f_n = 2n,\\
\mathrm{L}: \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\phi_0(x)L_n^{(g-1/2)}(\eta(x)), &\qquad L_n^{(g-1/2)\prime}(\eta) = -L_{n-1}^{(g+1/2)}(\eta),\\
&= 2xe^{-x^2/2}x^g\frac{d}{d\eta}L_n^{(g-1/2)}(\eta),\\
&= -2e^{-x^2/2}x^{g+1}L_{n-1}^{(g+1/2)}(\eta) = -2\phi_{n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}),\\
\mathrm{J}: \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\phi_0(x)&P_n^{(g-1/2,h-1/2)}(\eta(x))\\
&= -2\sin 2x\,\phi_0(x)\frac{d}{d\eta}P_n^{(g-1/2,h-1/2)}(\eta)\\
&= -2(n+g+h)(\sin x)^{g+1}(\cos x)^{h+1}P_{n-1}^{(g+1/2,h+1/2)}(\eta)\\
&= -2(n+g+h)\phi_{n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}).\\
&\qquad P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(\eta) = (1/2)(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\eta).
\end{aligned}$$

ノルム h_n 公式 (1.70) の n 依存性の導出

演算子 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ と $f_n(\boldsymbol{\lambda})$ (2.8) を用いて，1.6 節に記した H, L, J のノルム h_n の公式 (1.70) を導出しよう．基底状態波動関数のノルム $h_0(\boldsymbol{\lambda}) = (\phi_0(\boldsymbol{\lambda}),\phi_0(\boldsymbol{\lambda}))$ は初等的な積分で得られる．クラムの公式 (1.26):

$$(\phi_n^{[n]},\phi_n^{[n]}) = \prod_{j=0}^{n-1}\big(\mathcal{E}(n)-\mathcal{E}(j)\big)\cdot(\phi_n,\phi_n) = \prod_{j=0}^{n-1}\big(\mathcal{E}(n)-\mathcal{E}(j)\big)\cdot h_n, \tag{2.12}$$

から出発する．ここでは，簡単のために，$\boldsymbol{\lambda}$ 依存性は省略した．演算子 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ を何度も ϕ_n に作用させる:

$$\begin{aligned}
\phi_n^{[1]}(\boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\phi_n(\boldsymbol{\lambda}) = f_n(\boldsymbol{\lambda})\phi_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}),\\
\phi_n^{[2]}(\boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\phi_n^{(1)}(\boldsymbol{\lambda}) = f_n(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\phi_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\\
&= f_n(\boldsymbol{\lambda})f_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\phi_{n-2}(\boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\delta}),\\
&\ \ \vdots\\
\phi_n^{[n]}(\boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{N}(\boldsymbol{\lambda})\phi_0(\boldsymbol{\lambda}+n\boldsymbol{\delta}), \quad \mathcal{N}(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=0}^{n-1} f_{n-j}(\boldsymbol{\lambda}+j\boldsymbol{\delta}).
\end{aligned}$$

これを (2.12) に代入して，一般公式を得る:

$$h_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\mathcal{N}(\boldsymbol{\lambda})^2}{\prod_{j=0}^{n-1}\left(\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})-\mathcal{E}(j;\boldsymbol{\lambda})\right)}h_0(\boldsymbol{\lambda}+n\boldsymbol{\delta}). \tag{2.13}$$

1.6 節で導入した 3 つの例については

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}: f_n = 2n, \quad \prod_{j=0}^{n-1} f_{n-j} = 2^n n!, \quad \prod_{j=0}^{n-1}(\mathcal{E}(n)-\mathcal{E}(j)) = 2^n n!,\\
&\quad h_0 = \sqrt{\pi} \ \Rightarrow h_n = 2^n n!\sqrt{\pi},\\
&\mathrm{L}: f_n = -2, \quad \prod_{j=0}^{n-1} f_{n-j} = (-2)^n, \quad \prod_{j=0}^{n-1}(\mathcal{E}(n)-\mathcal{E}(j)) = 4^n n!,\\
&\quad h_0(g) = \frac{1}{2}\Gamma(g+\tfrac{1}{2}) \ \Rightarrow h_n(g) = \frac{\Gamma(n+g+\frac{1}{2})}{2n!},\\
&\mathrm{J}: f_n(\boldsymbol{\lambda}) = (-2)(n+g+h),\\
&\quad \mathcal{N}(\boldsymbol{\lambda}) = (-2)^n\prod_{j=0}^{n-1}(n+j+g+h) = (-2)^n\frac{\Gamma(2n+g+h)}{\Gamma(n+g+h)},\\
&\quad \prod_{j=0}^{n}(\mathcal{E}(n)-\mathcal{E}(j)) = 4^n\prod_{j=0}^{n-1}\left(n(n+g+h)-j(j+g+h)\right)\\
&\qquad\qquad = 4^n n!\frac{\Gamma(2n+g+h)}{\Gamma(n+g+h)},\\
&\quad h_0(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\Gamma(g+\frac{1}{2})\Gamma(h+\frac{1}{2})}{2(g+h)\Gamma(g+h)}\\
&\qquad\qquad \Rightarrow h_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\Gamma(n+g+\frac{1}{2})\Gamma(n+h+\frac{1}{2})}{2n!(2n+g+h)\Gamma(n+g+h)}.
\end{aligned}$$

基底状態からの寄与を ‘はがす’ ことによって，多項式固有関数に関する**前方ずらし演算子** (forward shift operator) $\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda})$ と**後方ずらし演算子** (backward shift operator) $\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})$ を導入する．$\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})$ は

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^{-1}\circ\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\circ\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) = c_{\mathcal{F}}\frac{d}{d\eta}, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^{\dagger} \circ \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) \tag{2.15}$$

$$= -4c_{\mathcal{F}}^{-1}c_2(\eta)\Big(\frac{d}{d\eta} + \frac{c_1(\eta,\boldsymbol{\lambda})}{c_2(\eta)}\Big), \tag{2.16}$$

で定義される．ここで，$c_1(\eta,\boldsymbol{\lambda})$, $c_2(\eta)$ と $c_{\mathcal{F}}$ は

$$c_1(\eta,\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\frac{1}{2}\eta & : \mathrm{H} \\ g+\frac{1}{2}-\eta & : \mathrm{L} \\ h-g-(g+h+1)\eta & : \mathrm{J} \end{cases}, \tag{2.17}$$

$$c_2(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{4} & : \mathrm{H} \\ \eta & : \mathrm{L} \\ 1-\eta^2 & : \mathrm{J} \end{cases}, \quad c_{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & : \mathrm{H} \\ 2 & : \mathrm{L} \\ -4 & : \mathrm{J} \end{cases}. \tag{2.18}$$

これは，簡単に検証できる．前方ずらしでは，

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}) \circ \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) = \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) \circ \frac{d}{dx} = \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) \circ \frac{d\eta}{dx}\frac{d}{d\eta}$$

を使えばよい．後方ずらしは

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}: e^{x^2/2} \circ \Big(-\frac{d}{dx} + x\Big) \circ e^{-x^2/2} = -\frac{d}{dx} + 2x, \\
&\mathrm{L}: e^{x^2/2}x^{-g} \circ \Big(-\frac{d}{dx} + x - \frac{g}{x}\Big) \circ e^{-x^2/2}x^{g+1} \\
&\quad = x\Big(-\frac{d}{dx} + 2x - \frac{g}{x} - \frac{g+1}{x}\Big) = -2\eta\frac{d}{d\eta} + 2\eta - (2g+1), \\
&\mathrm{J}: (\sin x)^{-g}(\cos x)^{-h} \circ \Big(-\frac{d}{dx} - g\cot x + h\tan x\Big) \circ (\sin x)^{g+1}(\cos x)^{h+1} \\
&\quad = -\sin x\cos x\left(\frac{d}{dx} + (2g+1)\cot x - (2h+1)\tan x\right) \\
&\quad = (1-\eta^2)\frac{d}{d\eta} - (g+h+1)\eta + h - g.
\end{aligned}$$

すると，上の関係式 (2.8)–(2.9) は

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda})P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}) \equiv c_{\mathcal{F}}\frac{d}{d\eta}P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}) = f_n(\boldsymbol{\lambda})P_{n-1}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}), \tag{2.19}$$

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})P_{n-1}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}), \tag{2.20}$$

のように，多項式同士のものになる．因子化ハミルトニアン (1.5) に対応して，前方ずらし演算子と後方ずらし演算子の積は相似変換したハミルトニアン (1.67)

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda}) = -4\Big(c_2(\eta)\frac{d^2}{d\eta^2} + c_1(\eta,\boldsymbol{\lambda})\frac{d}{d\eta}\Big), \tag{2.21}$$

を与え，古典直交多項式に働く 2 階の微分演算子になる．(1.71)–(1.73) 参照．

普遍的なロドリーグの公式

前方ずらし演算子 (2.14) のエルミート共役から

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger = -c_{\mathcal{F}}\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\delta})^{-1}\circ\frac{d}{d\eta}\circ\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}), \tag{2.22}$$

を得る．これを用いて，多少の計算をすると，普遍的なロドリーグの公式 (2.3) が

$$P_n(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}) \propto \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\delta})^{-1}\frac{d^n}{d\eta^n}\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+n\boldsymbol{\delta})\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+(n-1)\boldsymbol{\delta}), \tag{2.23}$$

と書けることが判る．これを使って，H, L, J のロドリーグ公式 (A.15)–(A.17) が得られる．

2.3　他の形状不変なポテンシャル

ここでいくつかの良く知られた形状不変で厳密可解なポテンシャルの例を挙げよう．あるものは閉じ込め型で，無限個の離散固有準位を持ち，他は有限個のみである．固有関数に登場する直交多項式は，ラゲールおよびヤコビ多項式とその特殊形である．ポテンシャルの名前は，インフェルト・ハルの解説[10]に従った．種々のデータと離散対称性変換 (1.77)–(1.79) およびそれから得られる仮想状態波動関数（4.1.1 節），擬仮想状態波動関数（4.1.2 節）も書いておく．（擬）仮想状態波動関数の定義については，第 4 章参照のこと．パラメタについて，形状不変変換 $\boldsymbol{\lambda}\to\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}$ で，増加するもの ($\boldsymbol{\delta}=1$) は，記号 g を，減少するもの ($\boldsymbol{\delta}=-1$) には h を，変化しない ($\boldsymbol{\delta}=0$) ものには μ を割り当てた．唯一の例外は，ポッシェル・テラーポテンシャル (J) で，2 つの増加パラメタに g, h を使った．以後特別に断らない限りは，この本の中では，パラメタ g あるいは h の値は，一般の値を取るとして，整数値，半整数値などではないとしよう．

2.3.1　$1/\sin^2 x$ ポテンシャル

最初の例は $1/\sin^2 x$ ポテンシャルで，よく知られたサザーランド模型の 1 体版である[12]．1.6 節で導入したポッシェル・テラーポテンシャル (J) の特別な場合 ($g=h$) ではあるが，別々に議論するだけの価値がある．1.3.1 節で扱った無限に深い井戸型ポテンシャルは，これの $g=1$ の場合にあたる．この系は，両端 $x=0,\pi$ での無限に高くなる壁によって，無限個の離散固有準位を持つ：

$$\boldsymbol{\lambda}=g,\quad \boldsymbol{\delta}=1,\quad 0<x<\pi,\quad g>\frac{1}{2},\quad \alpha\stackrel{\text{def}}{=}g-\frac{1}{2},$$

$$w(x;\boldsymbol{\lambda})=g\log\sin x,\quad U(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{g(g-1)}{\sin^2 x}-g^2,$$

$$\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=n(n+2g),\ \eta(x)=\cos x,$$

$$f_n(\boldsymbol{\lambda})=-\frac{n+2g}{2},\ b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})=-2n,$$

$$
\begin{aligned}
&\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda}) = (\sin x)^g P_n\bigl(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\bigr), \quad \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) = (\sin x)^g,\\
&P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}) = P_n^{(\alpha,\alpha)}(\eta),\\
&h_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{2^{2g}\bigl(\Gamma(n+g+1/2)\bigr)^2}{2(n+g)n!\Gamma(n+2g)}, \quad P_n(-\eta;\boldsymbol{\lambda}) = (-1)^n P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}).
\end{aligned}
$$

固有多項式 $P_n^{(\alpha,\alpha)}(\eta)$ は，係数を変えて，ゲーゲンバウアー (Gegenbauer) 多項式 $C_n^{(\alpha+1/2)}(\eta)$，あるいは超球 (ultraspherical) 多項式と呼ばれる：

$$
\frac{P_n^{(\alpha,\alpha)}(\eta)}{(\alpha+1)_n} = \frac{C_n^{(\alpha+1/2)}(\eta)}{(2\alpha+1)_n}. \tag{2.24}
$$

離散対称性変換 $\mathfrak{t}$ と擬仮想状態波動関数は，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{H}\bigl(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}), \quad \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda}) = 1-g,\\
&\tilde{\phi}_{\rm v}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \phi_{\rm v}\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) = (\sin x)^{1-g} P_{\rm v}\bigl(\eta(x);\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr),\\
&\tilde{\mathcal{E}}({\rm v};\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}\bigl({\rm v};\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(-{\rm v}-1;\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}
$$

である．擬仮想状態波動関数については，4.1.2 節参照．

2.3.2 遠心力付きのクーロンポテンシャル

この系のポテンシャルは，端点 $x=0$ での無限に高くなる壁と $1/x$ の引力からなり，$x\to+\infty$ で 0 に近づくが，無限個の離散固有状態を持つ：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda} = g, \quad \boldsymbol{\delta} = 1, \quad 0 < x < \infty, \quad g > \frac{1}{2},\\
&w(x;\boldsymbol{\lambda}) = g\log x - \frac{x}{g}, \quad U(x;\boldsymbol{\lambda}) = \frac{g(g-1)}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{g^2},\\
&\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{g^2} - \frac{1}{(g+n)^2}, \quad \eta(x) = x^{-1},\\
&\quad f_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{-2}{g(g+n)^2}, \quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{-n(2g+n)}{2g},\\
&\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{x}{g+n}} x^{g+n} P_n\bigl(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\bigr), \quad \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{x}{g}} x^g,\\
&P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}) = \eta^n L_n^{(2g-1)}\bigl(\tfrac{2}{g+n}\eta^{-1}\bigr),\\
&h_n(\boldsymbol{\lambda}) = \Bigl(\frac{g+n}{2}\Bigr)^{2g+2} \frac{4}{n!}\,\Gamma(2g+n).
\end{aligned}
$$

この固有関数は基底状態と多項式 (1.62) のように因子化されていない．離散対称性変換 $\mathfrak{t}$ と擬仮想状態波動関数は，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{H}\bigl(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}), \quad \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda}) = 1-g,\\
&\tilde{\phi}_{\rm v}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \phi_{\rm v}\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) = e^{\frac{x}{g-{\rm v}-1}} x^{1-g+{\rm v}} P_{\rm v}\bigl(\eta(x);\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) \ (0 \le {\rm v} < g-1),\\
&\tilde{\mathcal{E}}({\rm v};\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}\bigl({\rm v};\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(-{\rm v}-1:\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}
$$

である．次数 v が $g-1<{\rm v}<2g-1$ ($g>\frac{3}{2}$) の時，離散対称性変換は第 2

種の (II) 仮想状態 $\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ を生成する．第 2 種の (II) 仮想状態については，4.1.1 節参照．

2.3.3　球状空間でのケプラー問題

この系は，両端 $x=0,\pi$ での無限に高くなる壁によって，無限個の離散固有準位を持つ：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda}=(g,\mu),\quad \boldsymbol{\delta}=(1,0),\quad 0<x<\pi,\quad g>\frac{3}{2},\ \ \mu>0,\\
&w(x;\boldsymbol{\lambda})=g\log\sin x-\frac{\mu}{g}x,\ U(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{g(g-1)}{\sin^2 x}-2\mu\cot x+\frac{\mu^2}{g^2}-g^2,\\
&\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=(g+n)^2-g^2+\frac{\mu^2}{g^2}-\frac{\mu^2}{(g+n)^2},\quad \eta(x)=\cot x,\\
&f_n(\boldsymbol{\lambda})=\frac{g^2(g+n)^2+\mu^2}{g(g+n)^2},\quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})=\frac{n(2g+n)}{g},\\
&\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})=e^{-\frac{\mu}{g+n}x}\bigl(\sin x\bigr)^{g+n}P_n\bigl(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\bigr),\quad \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})=e^{-\frac{\mu}{g}x}\bigl(\sin x\bigr)^{g},\\
&P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})=i^{-n}P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(i\eta),\\
&\qquad \alpha_n=-g-n+\frac{\mu}{g+n}i,\ \ \beta_n=-g-n-\frac{\mu}{g+n}i,\\
&h_n(\boldsymbol{\lambda})=\frac{e^{-\frac{\pi\mu}{g+n}}2^{1-2(g+n)}\pi(g+n)\Gamma(2g+n)}{n!\bigl((g+n)^2+\frac{\mu^2}{(g+n)^2}\bigr)\Gamma(g+\frac{\mu}{g+n}i)\Gamma(g-\frac{\mu}{g+n}i)}.
\end{aligned}
$$

この固有関数は基底状態と多項式 (1.62) のように因子化されていない．離散対称性変換 $\mathfrak{t}$ と擬仮想状態波動関数は，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}\bigl(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)+\mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}),\quad \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})=(1-g,\mu),\\
&\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_{\mathrm{v}}\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)=e^{\frac{\mu}{g-\mathrm{v}-1}x}\bigl(\sin x\bigr)^{1-g+\mathrm{v}}P_{\mathrm{v}}\bigl(\eta(x);\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (0\le \mathrm{v}<2g-1),\\
&\tilde{\mathcal{E}}(\mathrm{v};\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}\bigl(\mathrm{v};\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)+\mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(-\mathrm{v}-1;\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}
$$

である．

2.3.4　モースポテンシャル

この系は，有限個 $0\le n\le n_{\max}(\boldsymbol{\lambda})=[h]'$ の離散固有準位を持つ．（ここで $[a]'$ は a 未満の最大の整数を指す．）：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda}=(h,\mu),\quad \boldsymbol{\delta}=(-1,0),\quad -\infty<x<\infty,\quad h,\mu>0,\\
&w(x;\boldsymbol{\lambda})=hx-\mu e^{x},\quad U(x;\boldsymbol{\lambda})=\mu^2e^{2x}-\mu(2h+1)e^{x}+h^2,\\
&\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=h^2-(h-n)^2,\quad \eta(x)=e^{-x},\\
&\quad f_n(\boldsymbol{\lambda})=\frac{n-2h}{2\mu},\quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})=-2n\mu,
\end{aligned}
$$

$$\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})P_n\bigl(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\bigr),\quad \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})=e^{hx-\mu e^x},$$
$$P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})=(2\mu\eta^{-1})^{-n}L_n^{(2h-2n)}(2\mu\eta^{-1}),\quad h_n(\boldsymbol{\lambda})=\frac{\Gamma(2h-n+1)}{(2\mu)^{2h}n!\,2(h-n)}.$$

この系は，閉性関係 (3.4) も満たす[21].

離散対称性変換 t と擬仮想状態波動関数は，

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}\bigl(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)+\mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}),\quad \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})=(-1-h,-\mu),$$
$$\tilde{\phi}_{\rm v}(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_{\rm v}\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)=e^{-(h+1)x+\mu e^x}P_{\rm v}\bigl(\eta(x);\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)\quad ({\rm v}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}),$$
$$\tilde{\mathcal{E}}({\rm v};\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}\bigl({\rm v};\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)+\mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(-{\rm v}-1;\boldsymbol{\lambda}),$$

である．この系は双曲的ポッシェル・テラーポテンシャル 2.3.9 節から適当な極限操作で得られる．

2.3.5 $1/\cosh^2 x$（ソリトン）ポテンシャル

この系は，有限個 $0\leq n\leq n_{\max}(\boldsymbol{\lambda})=[h]'$ の離散固有準位を持つ．h が正整数の時，無反射ポテンシャルになる（5.2 節）:

$$\boldsymbol{\lambda}=h,\quad \boldsymbol{\delta}=-1,\quad -\infty<x<\infty,\quad h>0,$$
$$w(x;\boldsymbol{\lambda})=-h\log\cosh x,\quad U(x;\boldsymbol{\lambda})=-\frac{h(h+1)}{\cosh^2 x}+h^2,$$
$$\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=h^2-(h-n)^2,\quad \eta(x)=\sinh x,$$
$$f_n(\boldsymbol{\lambda})=h,\quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})=\frac{n(2h-n)}{h},$$
$$\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})P_n\bigl(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\bigr),\quad \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})=(\cosh x)^{-h},$$
$$P_n\bigl(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\bigr)=(\cosh x)^nP_n^{(h-n,h-n)}(\tanh x),$$
$$h_n(\boldsymbol{\lambda})=\frac{2^{2h-2n}\Gamma(h+1)^2}{n!\,(h-n)\Gamma(2h-n+1)}.$$

この系は，閉性関係 (3.4) も満たす[21]．固有多項式 $P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ は，

$$P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})=\frac{\bigl(h-[\frac{n-1}{2}]\bigr)_{[\frac{n+1}{2}]}}{(h-n+\frac12)_{[\frac{n+1}{2}]}}i^nP_n^{(-h-\frac12,-h-\frac12)}(i\eta),$$

のように書き換えられる．

離散対称性変換 t と擬仮想状態波動関数は，

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}\bigl(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)+\mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}),\quad \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})=-1-h,$$
$$\tilde{\phi}_{\rm v}(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_{\rm v}\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)=(\cosh x)^{h+1}P_{\rm v}\bigl(\eta(x);\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)\quad ({\rm v}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}),$$
$$\tilde{\mathcal{E}}({\rm v};\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}\bigl({\rm v};\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)+\mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(-{\rm v}-1;\boldsymbol{\lambda}),$$

である．この系はローゼン・モースポテンシャル（2.3.6 節）から $\mu\to 0$ の極限を取っても得られる．

2.3.6 ローゼン・モース (Rosen-Morse) ポテンシャル

この系は，有限個 $0 \le n \le n_{\max}(\boldsymbol{\lambda}) = [h]'$ の離散固有準位を持つ：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda} = (h, \mu), \quad \boldsymbol{\delta} = (-1, 0), \quad -\infty < x < \infty, \quad h > \sqrt{\mu} > 0,\\
&w(x;\boldsymbol{\lambda}) = -h \log\cosh x - \frac{\mu}{h}x,\\
&U(x;\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{h(h+1)}{\cosh^2 x} + 2\mu\tanh x + h^2 + \frac{\mu^2}{h^2},\\
&\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) = h^2 - (h-n)^2 + \frac{\mu^2}{h^2} - \frac{\mu^2}{(h-n)^2}, \quad \eta(x) = \tanh x,\\
&f_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{h^2(h-n)^2 - \mu^2}{h(h-n)^2}, \quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{n(2h-n)}{h},\\
&\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{\mu}{h-n}x}(\cosh x)^{-h+n} P_n\bigl(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\bigr),\\
&\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{\mu}{h}x}(\cosh x)^{-h},\\
&P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}) = P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(\eta), \quad \alpha_n = h - n + \frac{\mu}{h-n}, \quad \beta_n = h - n - \frac{\mu}{h-n},\\
&h_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{2^{2h-2n}(h-n)\Gamma(h+\frac{\mu}{h-n}+1)\Gamma(h-\frac{\mu}{h-n}+1)}{n!\,\bigl((h-n)^2 - \frac{\mu^2}{(h-n)^2}\bigr)\Gamma(2h-n+1)}.
\end{aligned}
$$

$U(x;\boldsymbol{\lambda})$ の $\tanh x$ の項のために，$x \to \pm\infty$ の漸近値が異なる，$U(+\infty;\boldsymbol{\lambda}) = U(-\infty;\boldsymbol{\lambda}) + 4\mu$. 上のソリトンポテンシャル（2.3.5 節）は $\mu \to 0$ の極限にあたる．対称性 $x \to -x, \mu \to -\mu$ に基づいて，正の μ を選んだ．

この固有関数は基底状態と多項式 (1.62) のように**因子化されていない**．離散対称性変換 t と擬仮想状態波動関数は

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{H}\bigl(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}), \quad \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda}) = (-1-h, \mu),\\
&\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \phi_{\mathrm{v}}\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) = e^{\frac{\mu x}{h+1+\mathrm{v}}}(\cosh x)^{h+1+\mathrm{v}} P_{\mathrm{v}}\bigl(\eta(x);\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) \ (\mathrm{v} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}),\\
&\tilde{\mathcal{E}}(\mathrm{v};\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}\bigl(\mathrm{v};\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(-\mathrm{v}-1;\boldsymbol{\lambda}).
\end{aligned}
$$

2.3.7 双曲的対称こま II

この系は，有限個 $0 \le n \le n_{\max}(\boldsymbol{\lambda}) = [h]'$ の離散固有準位を持つ：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda} = (h, \mu), \quad \boldsymbol{\delta} = (-1, 0), \quad -\infty < x < \infty, \quad h, \mu > 0,\\
&w(x;\boldsymbol{\lambda}) = -h \log\cosh x - \mu \tan^{-1}\sinh x,\\
&U(x;\boldsymbol{\lambda}) = \frac{-h(h+1) + \mu^2 + \mu(2h+1)\sinh x}{\cosh^2 x} + h^2,\\
&\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) = h^2 - (h-n)^2, \quad \eta(x) = \sinh x,\\
&f_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{n-2h}{2}, \quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}) = -2n,\\
&\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda}) = \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})P_n\bigl(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\bigr), \quad \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\mu\tan^{-1}\sinh x}(\cosh x)^{-h},\\
&P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}) = i^{-n}P_n^{(\alpha,\beta)}(i\eta), \quad \alpha = -h - \tfrac{1}{2} - i\mu, \quad \beta = -h - \tfrac{1}{2} + i\mu,
\end{aligned}
$$

$$h_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\pi\Gamma(2h-n+1)}{2^{2h}n!\,(h-n)\Gamma(h-n+\frac{1}{2}+i\mu)\Gamma(h-n+\frac{1}{2}-i\mu)}.$$

この系は，閉性関係 (3.4) も満たす[21].

離散対称性変換 t と擬仮想状態波動関数は:

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{H}\big(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}), \quad \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda}) = (-1-h, -\mu),$$
$$\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \phi_{\mathrm{v}}\big(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big) = e^{\mu\tan^{-1}\sinh x}(\cosh x)^{h+1}P_{\mathrm{v}}\big(\eta(x);\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big),$$
$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathrm{v};\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}\big(\mathrm{v};\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(-\mathrm{v}-1;\boldsymbol{\lambda}), \qquad (\mathrm{v}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

2.3.8 エッカート (Eckart) ポテンシャル

この系は，有限個 $0 \leq n \leq n_{\max}(\boldsymbol{\lambda}) = [\sqrt{\mu}-g]'$ の離散固有準位を持つ：

$$\boldsymbol{\lambda} = (g,\mu), \quad \boldsymbol{\delta} = (1,0), \quad 0 < x < \infty, \quad \sqrt{\mu} > g > \frac{1}{2},$$
$$w(x;\boldsymbol{\lambda}) = g\log\sinh x - \frac{\mu}{g}x,\ U(x;\boldsymbol{\lambda}) = \frac{g(g-1)}{\sinh^2 x} - 2\mu\coth x + g^2 + \frac{\mu^2}{g^2},$$
$$\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) = g^2 - (g+n)^2 + \frac{\mu^2}{g^2} - \frac{\mu^2}{(g+n)^2}, \quad \eta(x) = \coth x,$$
$$f_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\mu^2 - g^2(g+n)^2}{g(g+n)^2}, \quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{n(2g+n)}{g},$$
$$\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{\mu}{g+n}x}(\sinh x)^{g+n}P_n\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\big),\ \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{\mu}{g}x}(\sinh x)^g,$$
$$P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}) = P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(\eta),\ \alpha_n = -g-n+\frac{\mu}{g+n},\ \beta_n = -g-n-\frac{\mu}{g+n},$$
$$h_n(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{(g+n)\Gamma(1-g+\frac{\mu}{g+n})\Gamma(2g+n)}{2^{2g+2n}n!\,\big(\frac{\mu^2}{(g+n)^2}-(g+n)^2\big)\Gamma(g+\frac{\mu}{g+n})}.$$

この固有関数は基底状態と多項式 (1.62) のように因子化されていない．離散対称性変換 t と擬仮想状態波動関数は

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{H}\big(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}), \quad \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda}) = (1-g, \mu),$$
$$\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \phi_{\mathrm{v}}\big(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big) = e^{\frac{\mu}{g-\mathrm{v}-1}x}(\sinh x)^{-g+\mathrm{v}+1}P_{\mathrm{v}}\big(\eta(x);\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big),$$
$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathrm{v};\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}\big(\mathrm{v};\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big) + \mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(-\mathrm{v}-1;\boldsymbol{\lambda})$$
$$\Big(0 \leq \mathrm{v} < g-1,\ \mathrm{v} > \frac{\mu}{g}+g-1\Big).$$

次数 v が $g-1 < \mathrm{v} < 2g-1$ $(g > \frac{3}{2})$ の時，離散対称性変換は第 2 種の (II) 仮想状態 $\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ を生成する．

2.3.9 双曲的ポッシェル・テラーポテンシャル

この系は，有限個 $0 \leq n \leq n_{\max}(\boldsymbol{\lambda}) = [\frac{h-g}{2}]'$ の離散固有準位を持つ：

$$\boldsymbol{\lambda} = (g,h), \quad \boldsymbol{\delta} = (1,-1), \quad 0 < x < \infty, \quad h > g > \frac{1}{2},$$

$$
\begin{aligned}
&w(x;\boldsymbol{\lambda})=g\log\sinh x-h\log\cosh x,\\
&U(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{g(g-1)}{\sinh^2 x}-\frac{h(h+1)}{\cosh^2 x}+(h-g)^2,\\
&\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=4n(h-g-n),\quad \eta(x)=\cosh 2x,\\
&f_n(\boldsymbol{\lambda})=2(n+g-h),\quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})=-2n,\\
&\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})P_n\bigl(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\bigr),\quad \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})=(\sinh x)^g(\cosh x)^{-h},\\
&P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})=P_n^{(g-\frac12,-h-\frac12)}(\eta),\quad h_n(\boldsymbol{\lambda})=\frac{\Gamma(n+g+\frac12)\Gamma(h-g-n+1)}{2\,n!\,(h-g-2n)\Gamma(h-n+\frac12)}.
\end{aligned}
$$

固有値は $\mathcal{E}_n(\boldsymbol{\lambda})=4\Bigl(\bigl(\frac{h-g}{2}\bigr)^2-\bigl(\frac{h-g}{2}-n\bigr)^2\Bigr)$ のように表すこともできる．この系は，閉性関係 (3.4) も満たす[21]．

3 種類の離散対称性変換がある:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}:\quad \mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}\bigl(\mathfrak{t}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)-(1+2g)(1+2h),\quad \mathfrak{t}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})=(g,-1-h),\\
&\mathrm{II}:\ \mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}\bigl(\mathfrak{t}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)-(1-2g)(1-2h),\quad \mathfrak{t}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})=(1-g,h),\\
&\mathrm{III}:\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}\bigl(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)+\mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda}),\ \mathfrak{t}=\mathfrak{t}^{\mathrm{II}}\circ\mathfrak{t}^{\mathrm{I}},\ \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})=(1-g,-1-h).
\end{aligned}
$$

擬仮想状態波動関数は第 3 種の変換 III で生成される:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_{\mathrm{v}}\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)=(\sinh x)^{1-g}(\cosh x)^{h+1}P_{\mathrm{v}}\bigl(\eta(x);\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)\ \ (\mathrm{v}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}),\\
&\tilde{\mathcal{E}}(\mathrm{v};\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}\bigl(\mathrm{v};\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)+\mathcal{E}(-1;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(-\mathrm{v}-1;\boldsymbol{\lambda}).
\end{aligned}
$$

第 1 種 (I) と第 2 種 (II) の仮想状態波動関数は第 1 種 (I) と第 2 種 (II) の離散対称性変換で作られる．

次の極限操作でモースポテンシャル（2.3.4 節）とその固有関数が得られる:

$$
x=\tfrac12(x^{\mathrm{M}}-a),\ g=\tfrac12\mu e^a+\alpha,\ h=\tfrac12\mu e^a+2h^{\mathrm{M}}+\alpha,\ \lim_{a\to\infty}\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})=4\mathcal{H}^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{M}}).
$$

2.4 形状不変でなくて可解なポテンシャル

形状不変性は厳密可解性の十分条件であって，必要条件ではない．形状不変でなくて可解なポテンシャルがいくつか知られている．第 5 章の散乱問題で扱う一般的な無反射ポテンシャル (5.12)–(5.13) がよく知られた初等的な例である．この場合は，固有関数は，初等関数で書かれる．他にも，ナタンゾン (Natanzon) 類のポテンシャルと呼ばれるものがあり[22]~[24]，有限個の離散固有準位を持ち，その固有関数は（合流型）超幾何関数の和で書かれる．ナタンゾン類のポテンシャルと形状不変ポテンシャルとを含む可解ポテンシャルの統一描像を見つけるのは，研究者への面白い挑戦であろう．

2.5 可解なフォッカー・プランク方程式

ここで，フォッカー・プランク (Fokker-Planck) 方程式とシュレーディンガー方程式の間のよく知られた関係[25]をおさらいしよう．フォッカー・プランク方程式は，非平衡統計力学の基本方程式の一つで，マルコフ過程の確率分布関数の時間変化を表す．ブラウン運動，拡散過程，プラズマ物理などの物理学以外にも，神経回路，経済学など広く生物・社会現象に応用がある．確率過程論では，フォッカー・プランク方程式は Kolmogorov の前進方程式とも呼ばれる．可解なシュレーディンガー方程式には，可解なフォッカー・プランク方程式が対応する．

1 次元のフォッカー・プランク方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(x;t) = L_{FP}\mathcal{P}(x;t), \quad \mathcal{P}(x;t) \geq 0, \quad \int \mathcal{P}(x;t)dx = 1, \tag{2.25}$$

と書かれる．ここで $\mathcal{P}(x;t)$ はパラメタ x の適当な連続領域, 例えば, $(-\infty,\infty)$, $(0,\infty)$ あるいは $(0,\pi)$ の上で定義された確率分布関数である．量子力学のハミルトニアン $\mathcal{H}$ (1.7) に対応したフォッカー・プランク演算子 L_{FP} は,

$$L_{FP} \stackrel{\text{def}}{=} -\phi_0 \circ \mathcal{H} \circ \phi_0^{-1} = \frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} \circ \frac{dw(x)}{dx}, \tag{2.26}$$

のように定義される．ここで $\phi_0(x) = e^{w(x)}$ はハミルトニアン $\mathcal{H}$ (1.1) の基底状態固有関数であり，演算子 $\mathcal{A}$ (1.8) のゼロモードでもある*1)．このことが L_{FP} が**半負定値** (negative semi-definite) であることを保証する．正規化された 2 乗可積分な基底状態固有関数が，対応する L_{FP} 演算子の**定常分布** (stationary distribution) $\hat{\phi}_0(x)^2$ を与える:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi}_0(x)^2 = L_{FP}\hat{\phi}_0(x)^2 = 0, \quad \int \hat{\phi}_0(x)^2 dx = 1.$$

フォッカー・プランク演算子 L_{FP} の固有ベクトルが $\phi_0(x)\phi_n(x)$ であることは自明である:

$$L_{FP}\phi_0(x)\phi_n(x) = -\mathcal{E}(n)\phi_0(x)\phi_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2.27}$$

勝手な初期の確率分布 $\mathcal{P}(x;0)$（$\int \mathcal{P}(x;0)dx = 1$ を満たす）はそれらの線形結合 $\{\hat{\phi}_0(x)\hat{\phi}_n(x)\}$, $n = 0, 1, \ldots$ で表される:

$$\mathcal{P}(x;0) = \hat{\phi}_0(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\hat{\phi}_n(x), \quad c_0 = 1,$$
$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{\phi}_n, \hat{\phi}_0(x)^{-1}\mathcal{P}(x;0)), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

---

*1) 多項式に働く $\widetilde{\mathcal{H}}$ (1.67) の場合と比べると，ϕ_0 による**逆相似変換** (inverse similarity transformation) になっていることを強調しよう: $L_{FP} = -\phi_0^2 \circ \widetilde{\mathcal{H}} \circ \phi_0^{-2}$. 8.3 節の出生死亡演算子 (8.44) も参照されたい.

その初期分布に対応するフォッカー・プランク方程式の解は

$$\mathcal{P}(x;t) = \hat{\phi}_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, e^{-\mathcal{E}(n)t} \hat{\phi}_n(x), \quad t > 0,$$

となる．これはハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有関数 $\{\phi_n(x)\}$ の**完全性** (completeness) の帰結である．エネルギースペクトルの正値性 $\mathcal{E}(n) > 0$, $n \geq 1$ (1.3) によって，無限の未来では定常分布 $\hat{\phi}_0^2(x)$ が実現することが判る:

$$\lim_{t \to \infty} \mathcal{P}(x;t) = \hat{\phi}_0^2(x). \tag{2.28}$$

初期 $t = 0$ にパラメタ y に集中していたもの

$$\mathcal{P}(x;0) = \delta(x - y) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\phi}_n(x) \hat{\phi}_n(y),$$

が時刻 t でどのように分布するかを表す**推移確率** (transition probability) は

$$\mathcal{P}(y,x;t) = \hat{\phi}_0(x) \hat{\phi}_0(y)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mathcal{E}(n)t} \hat{\phi}_n(x) \hat{\phi}_n(y), \quad t > 0, \tag{2.29}$$

となる．多項式波動関数 $P_n(\eta(x))$, (1.62) を用いると，推移確率の表式は

$$\mathcal{P}(y,x;t) = \phi_0(x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{-1} \, e^{-\mathcal{E}(n)t} P_n(\eta(x)) P_n(\eta(y)), \quad t > 0, \tag{2.30}$$

で与えられる．ここで h_n は正規化定数 (1.70) である．当然ながら，推移確率 $\mathcal{P}(y,x;t)$(2.29) は，フォッカー・プランク方程式 (2.25) を満たし，任意の $t' \in (0,t)$ について，チャップマン・コルモゴロフ (Chapman-Kolmogorov) 方程式

$$\mathcal{P}(y,x;t) = \int dz \mathcal{P}(y,z;t') \mathcal{P}(z,x;t-t'), \tag{2.31}$$

が成り立つ．これは，正規化固有関数の直交性 $\int \hat{\phi}_n(x) \hat{\phi}_m(x) dx = \delta_{n\,m}$ の帰結である．

厳密可解な量子力学の多くの例[10], [11]から，対応するフォッカー・プランク方程式の推移確率 (2.29)–(2.30) を明示的に計算できることになる．出てくる多項式はエルミート，ラゲール，ヤコビである．

形状不変な系にクラムの定理（1.3 節）やその拡張（1.4 節）の変換を施した場合の効果について述べてこの章を終わろう．クラムの変換で M 個の固有状態を順番に削除してゆくと，パラメタを $\boldsymbol{\lambda} \to \boldsymbol{\lambda} + M\boldsymbol{\delta}$ にずらした同じ理論になる．従って，形状不変な系にクラムの定理を作用させても，新しいものは生まれてこない．一方で，クライン・アドラー変換（1.4 節）では，新しい，つまり，元とは異なった，可解系が得られる（3.5 節参照）．

第 3 章
ハイゼンベルグ描像での可解性

よく知られているように，場の量子論の定式化では，ハイゼンベルグ演算子を用いるものが中心的である．また，調和振動子の生成・消滅演算子は現代量子物理学の礎石であると言ってもよい．しかしながら，完全可解なハミルトニアンについても，一般の観測可能量 (observable) についてのハイゼンベルグ運動方程式の解は，明示的に表すことができない．この章では，特別な物理量，**正弦的座標** $\eta(x)$ について，ハイゼンベルグ演算子解が明示的に得られることを示す．

3.1 閉性関係式

ハイゼンベルグ描像では，観測可能量が時間に依存し，状態は時間変化しない．観測可能量 $\hat{\mathbf{A}}(t)$ のハイゼンベルグ運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{A}}(t) = i\,[\mathcal{H}, \hat{\mathbf{A}}(t)], \tag{3.1}$$

である．正規化された直交関数系 $\{\hat{\phi}_n(x)\}$, $n = 0, 1, \ldots$ を一つ勝手に選んで，上の方程式を**行列型** (matrix form)

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{A}}_{n\,m}(t) = i\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\mathcal{H}_{n\,k}\hat{\mathbf{A}}_{k\,m}(t) - \hat{\mathbf{A}}_{n\,k}(t)\mathcal{H}_{k\,m}\Big),$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{n\,m}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int \hat{\phi}_n(x)^*\hat{\mathbf{A}}(t)\hat{\phi}_m(x)dx,$$

$$\mathcal{H}_{n\,m} \stackrel{\text{def}}{=} \int \hat{\phi}_n(x)^*\mathcal{H}\hat{\phi}_m(x)dx,$$

に書き直すことができる．また，上のハイゼンベルグ運動方程式 (3.1) の形式解は

$$\hat{\mathbf{A}}(t) = e^{it\mathcal{H}}\hat{\mathbf{A}}(0)e^{-it\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})^n\hat{\mathbf{A}}(0),$$

と書ける．ここで，随伴 (adjoint) 演算子 $(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})X \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\mathcal{H}, X]$ の定義を用いた．明示的な閉じた形の解を得るためには，多重交換子

$$[\mathcal{H}, [\mathcal{H}, \cdots, [\mathcal{H}, \hat{\mathbf{A}}(0)]] \cdots]$$

を計算し，その無限和を評価することが必要になる．こんな訳で，一般の観測可能量について，ハイゼンベルグ運動方程式は手に負えないと考えられていた．

この節では，ほとんどの形状不変な量子力学のハミルトニアンについて，正弦的座標 $\eta(x)$ のハイゼンベルグ演算子解

$$e^{it\mathcal{H}}\eta(x)e^{-it\mathcal{H}}$$

が明示的に閉じた形で得られることを示そう．正弦的座標 $\eta(x)$ は，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有関数を形作っている直交多項式 $P_n(\eta(x))$ の変数である (1.62).

次数 0 から始まるどんな直交多項式も**三項関係式** (three term recurrence relations)[3]~[5]

$$\eta Q_n(\eta) = A_n Q_{n+1}(\eta) + B_n Q_n(\eta) + C_n Q_{n-1}(\eta), \tag{3.2}$$
$$Q_0(\eta) = \text{constant}, \quad Q_{-1}(\eta) = 0,$$

を満たすことはよく知られている．ここで，実係数 A_n, B_n と C_n は，多項式 $\{Q_n(\eta)\}$ の正規化に依存する．三項関係式は，直交性

$$(Q_n, Q_m) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int W(\eta) Q_n(\eta) Q_m(\eta) d\eta = 0, \quad n > m,$$

の簡単な帰結である．ここで $W(\eta)$ は，直交重み関数で，これが正定値になるためには $A_{n-1}C_n > 0$ $(n \geq 1)$ が必要である．三項関係式の導出は簡単で，多項式の定義から，$\eta Q_n(\eta)$ は η の $n+1$ 次の多項式で，

$$\eta Q_n(\eta) = A_n Q_{n+1}(\eta) + B_n Q_n(\eta) + C_n Q_{n-1}(\eta) + D_n(\eta),$$

と書ける．ここで，$D_n(\eta)$ は 0 でなければ，η の k 次 $(0 \leq k < n-1)$ の多項式である．これは，$(Q_k, D_n) \neq 0$ を意味するが，矛盾である．というのも $(Q_k, \eta Q_n) = (\eta Q_k, Q_n) = 0$ で，$(Q_k, Q_{n+1}) = (Q_k, Q_n) = (Q_k, Q_{n-1}) = 0$ であるので，$D_n(\eta) \equiv 0$ でなければならない． □

逆に，次数 0 から始まるどんな多項式の族も三項関係式を満たせば，直交多項式になる (Favard)[3].

三項関係式は，量子力学的な因子化された固有関数 (1.62) に関しては，

$$\eta(x)\phi_n(x) = A_n\phi_{n+1}(x) + B_n\phi_n(x) + C_n\phi_{n-1}(x) \quad (n \geq 0), \tag{3.3}$$

を意味する．つまり，演算子 $\eta(x)$ は，生成演算子のように固有状態 n を $n+1$

に写すように働き，また消滅演算子のように固有状態 n を $n-1$ に写す．このことと，調和振動子の生成・消滅演算子が，座標 x のハイゼンベルグ演算子解の正・負振動数部分になっているというよく知られた事実を結び付けて，この節の出発点となる．以下に示すように，正弦的座標 $\eta(x)$ は，正弦的な運動を行い (3.6)，その振動数はエネルギーに依存する．つまり，一般には，調和的でない．

正弦的座標 $\eta(x)$ のハイゼンベルグ演算子が閉じた形の表式を持つ十分条件は，次の**閉性関係式** (closure relation)[21]

$$[\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta(x)]\,]=\eta(x)\,R_0(\mathcal{H})+[\mathcal{H},\eta(x)]\,R_1(\mathcal{H})+R_{-1}(\mathcal{H}), \tag{3.4}$$

が成り立つことである．ここで，$R_i(y)$, $(i=0,\pm1)$ は y の多項式である．これが成り立つと，3 次の交換子 $[\mathcal{H},[\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta(x)]]]\equiv(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})^3\eta(x)$ が，$\mathcal{H}$ の多項式係数で $\eta(x)$ と $[\mathcal{H},\eta(x)]$ との線形結合

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})^3\eta(x)&=[\mathcal{H},\eta(x)]R_0(\mathcal{H})+[\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta(x)]]\,R_1(\mathcal{H})\\&=\eta(x)\,R_0(\mathcal{H})R_1(\mathcal{H})+[\mathcal{H},\eta(x)]\,\big(R_1(\mathcal{H})^2+R_0(\mathcal{H})\big)+R_{-1}(\mathcal{H})R_1(\mathcal{H}),\end{aligned}$$

になることが判る．この記号を使うと上の閉性関係式 (3.4) は

$$(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})^2\eta(x)=\eta(x)\,R_0(\mathcal{H})+(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})\eta(x)\,R_1(\mathcal{H})+R_{-1}(\mathcal{H}), \tag{3.5}$$

と書けて，演算子 $\mathrm{ad}\,\mathcal{H}$ が $\eta(x)$ に作用している場合の**ケイリー・ハミルトン** (Cayley-Hamilton) の定理と解釈できる．高次の交換子 $(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})^n\eta(x)$ もまた $\mathcal{H}$ の多項式係数で $\eta(x)$ と $[\mathcal{H},\eta(x)]$ との線形結合で表されることはすぐ判る．(3.4) が 2 次で閉じていることは，シュレーディンガー方程式が 2 階の方程式であることの反映だろう．これで，望む結果

$$\begin{aligned}e^{it\mathcal{H}}\eta(x)e^{-it\mathcal{H}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})^n\eta(x)\\&=[\mathcal{H},\eta(x)]\frac{e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t}-e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}}{\alpha_+(\mathcal{H})-\alpha_-(\mathcal{H})}-R_{-1}(\mathcal{H})R_0(\mathcal{H})^{-1}\\&\quad+\big(\eta(x)+R_{-1}(\mathcal{H})R_0(\mathcal{H})^{-1}\big)\frac{-\alpha_-(\mathcal{H})e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t}+\alpha_+(\mathcal{H})e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}}{\alpha_+(\mathcal{H})-\alpha_-(\mathcal{H})},\end{aligned} \tag{3.6}$$

に到達する[21]．このことは，単に $\eta(x)$ がエネルギーに依存する振動数 $\alpha_\pm(\mathcal{H})$

$$\alpha_\pm(\mathcal{H})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\tfrac{1}{2}\big(R_1(\mathcal{H})\pm\sqrt{R_1(\mathcal{H})^2+4R_0(\mathcal{H})}\,\big), \tag{3.7}$$

$$\alpha_+(\mathcal{H})+\alpha_-(\mathcal{H})=R_1(\mathcal{H}),\quad \alpha_+(\mathcal{H})\alpha_-(\mathcal{H})=-R_0(\mathcal{H}), \tag{3.8}$$

で，正弦振動することを意味している．

説明は簡単．定数係数の三項漸化式

$$\alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \gamma a_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},$$

の一般解は，2 次方程式の根で簡単に表示できる:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad x_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha},$$
$$a_n = A(x_+)^n + B(x_-)^n, \quad A + B = a_0, \quad Ax_+ + Bx_- = a_1.$$

上の閉性関係式 (3.5) は，$\eta(x)$ をずらすことで三項漸化式になり，

$$(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})^2 \tilde{\eta}(x) - (\mathrm{ad}\,\mathcal{H})\tilde{\eta}(x)R_1(\mathcal{H}) - \tilde{\eta}(x)\,R_0(\mathcal{H}) = 0,$$
$$\tilde{\eta}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \eta(x) + R_{-1}(\mathcal{H})R_0(\mathcal{H})^{-1},$$

解ける:

$$(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})^n \tilde{\eta}(x) = A\alpha_+(\mathcal{H})^n + B\alpha_-(\mathcal{H})^n,$$
$$A = -\tilde{\eta}(x)\frac{\alpha_-(\mathcal{H})}{\alpha_+(\mathcal{H}) - \alpha_-(\mathcal{H})} + [\mathcal{H}, \eta(x)]\frac{1}{\alpha_+(\mathcal{H}) - \alpha_-(\mathcal{H})},$$
$$B = \tilde{\eta}(x)\frac{\alpha_+(\mathcal{H})}{\alpha_+(\mathcal{H}) - \alpha_-(\mathcal{H})} - [\mathcal{H}, \eta(x)]\frac{1}{\alpha_+(\mathcal{H}) - \alpha_-(\mathcal{H})}.$$

これで，上の結果 (3.6) が得られる．

エネルギースペクトルは過剰決定系の方程式系 ($\mathcal{E}(0) = 0$)

$$\mathcal{E}(n+1; \boldsymbol{\lambda}) - \mathcal{E}(n; \boldsymbol{\lambda}) = \alpha_+(\mathcal{E}(n; \boldsymbol{\lambda})) = \mathcal{E}(1; \boldsymbol{\lambda} + n\boldsymbol{\delta}), \tag{3.9}$$
$$\mathcal{E}(n-1; \boldsymbol{\lambda}) - \mathcal{E}(n; \boldsymbol{\lambda}) = \alpha_-(\mathcal{E}(n; \boldsymbol{\lambda})) = -\mathcal{E}(1; \boldsymbol{\lambda} + (n-1)\boldsymbol{\delta}), \tag{3.10}$$

で決められる．形状不変性から決まる知られたエネルギースペクトル $\{\mathcal{E}(n)\}$ については，各 n において，$\alpha_\pm(\mathcal{H})$ (3.7) の定義に現れる根号の中身

$$R_1(\mathcal{E}(n))^2 + 4R_0(\mathcal{E}(n))$$

は，完全平方になっていて，上記の 2 つの条件は矛盾しない．

1.6 節で導入した 3 つの初等的な可解ポテンシャルの例 (1.59)–(1.61) について，閉性関係式 (3.4) の係数 $R_i(y)$, $(i = 0, \pm 1)$ および三項関係式の係数のデータは

$$\text{H}: \quad R_1(y) = 0, \quad R_0(y) = 4, \quad R_{-1}(y) = 0, \tag{3.11}$$
$$A_n = 1/2, \quad B_n = 0, \quad C_n = n, \tag{3.12}$$
$$\text{L}: \quad R_1(y) = 0, \quad R_0(y) = 16, \quad R_{-1}(y) = -8(y + 2g + 1), \tag{3.13}$$
$$A_n = -(n+1), \quad B_n = (2n + g + 1/2),$$
$$C_n = -(n + g - 1/2), \tag{3.14}$$
$$\text{J}: \quad R_1(y) = 8, \quad R_0(y) = 16\big(y + (g+h)^2 - 1\big),$$

$$R_{-1}(y) = 16(g-h)(g+h-1), \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2(n+1)(n+g+h)}{(2n+g+h)(2n+g+h+1)},\\
B_n &= \frac{(h-g)(g+h-1)}{(2n+g+h-1)(2n+g+h+1)},\\
C_n &= \frac{2(n+g-1/2)(n+h-1/2)}{(2n+g+h-1)(2n+g+h)}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

実際にこの 3 つの例について閉性関係式の係数 $R_j(y)$ を決定するのは，面倒ではあるがはっきりしている．またこれらの例について，固有値の公式 $\mathcal{E}(n)$, (2.5)–(2.7) が実際に過剰決定系 (3.9), (3.10) を満たしていることはすぐに確認できる．実際

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}: \alpha_\pm = \pm 2, \quad \mathcal{E}(n+1)-\mathcal{E}(n) = 2, \quad \mathcal{E}(n-1)-\mathcal{E}(n) = -2,\\
&\mathrm{L}: \alpha_\pm = \pm 4, \quad \mathcal{E}(n+1)-\mathcal{E}(n) = 4, \quad \mathcal{E}(n-1)-\mathcal{E}(n) = -4,\\
&\mathrm{J}: R_1(y)^2 + 4R_0(y) = 64(1+y+(g+h)^2-1),\ y \to \mathcal{E}(n) = 4n(n+g+h),\\
&\qquad \Rightarrow 64\left(4n(n+g+h)+(g+h)^2\right) = 64(2n+g+h)^2,\\
&\qquad \alpha_\pm(n) = 4 \pm 4(2n+g+h),\\
&\mathcal{E}(n+1)-\mathcal{E}(n) = 4(n+1)(n+1+g+h) - 4n(n+g+h) = 4(2n+g+h+1),\\
&\mathcal{E}(n-1)-\mathcal{E}(n) = 4(n-1)(n-1+g+h) - 4n(n+g+h) = -4(2n+g+h-1).
\end{aligned}$$

J について，三項関係式の係数 A_n, B_n, C_n(3.16) の分母と，$\mathcal{E}(n \pm 1) - \mathcal{E}(n)$ との関係に注意して欲しい．（可解な離散量子力学の統一理論，8.4 節を参照.）

この章の議論には，多項式の三項関係式 (3.2) から固有関数の三項関係式 (3.3) が帰結されることを用いている．それは，固有関数が基底状態波動関数 $\phi_0(x)$ と多項式に因子化 (1.62) されているものに限る．この条件を満たしていない形状不変なポテンシャル，遠心力付きのクーロンポテンシャル（2.3.2 節），球状空間でのケプラー問題（2.3.3 節），ローゼン・モースポテンシャル（2.3.6 節），エッカートポテンシャル（2.3.8 節）等については，ハイゼンベルグ演算子解はない．通常の量子力学において，閉性関係式 (3.4) を満たす正弦的座標の存在のための必要十分条件は，論文 [21] の Appendix A に与えられている．

3.2 生成・消滅演算子

消滅 (annihilation) $a^{(-)}$ および**生成** (creation) $a^{(+)}$ 演算子は，この厳密なハイゼンベルグ演算子解の正および負エネルギー部分として取り出される:

$$\begin{aligned}
&e^{it\mathcal{H}}\eta(x)e^{-it\mathcal{H}}\\
&\quad = a^{(+)}e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t} + a^{(-)}e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t} - R_{-1}(\mathcal{H})R_0(\mathcal{H})^{-1}, \qquad (3.17)\\
&a^{(\pm)} \stackrel{\text{def}}{=} \pm\Big([\mathcal{H}, \eta(x)] - \tilde{\eta}(x)\alpha_\mp(\mathcal{H})\Big)\Big(\alpha_+(\mathcal{H}) - \alpha_-(\mathcal{H})\Big)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \pm\big(\alpha_+(\mathcal{H}) - \alpha_-(\mathcal{H})\big)^{-1}\Big([\mathcal{H}, \eta(x)] + \alpha_\pm(\mathcal{H})\tilde{\eta}(x)\Big), \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
&e^{it\mathcal{H}}\eta(x)e^{-it\mathcal{H}}\phi_n(x)\\
&= e^{it(\mathcal{E}(n+1)-\mathcal{E}(n))}A_n\phi_{n+1}(x) + B_n\phi_n(x) + e^{it(\mathcal{E}(n-1)-\mathcal{E}(n))}C_n\phi_{n+1}(x)\\
&= e^{it\alpha_+(\mathcal{E}(n))}a^{(+)}\phi_n(x) + e^{it\alpha_-(\mathcal{E}(n))}a^{(-)}\phi_n(x)\\
&\qquad\qquad\qquad - R_{-1}(\mathcal{E}(n))R_0(\mathcal{E}(n))^{-1}\phi_n(x),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow
\end{aligned}$$

$$a^{(+)\dagger} = a^{(-)}, \tag{3.19}$$

$$a^{(+)}\phi_n(x) = A_n\phi_{n+1}(x), \quad a^{(-)}\phi_n(x) = C_n\phi_{n-1}(x), \tag{3.20}$$

$$B_n = -R_{-1}(\mathcal{E}(n))R_0(\mathcal{E}(n))^{-1}. \tag{3.21}$$

上の B_n 公式 (3.21) はとても興味深い．R_0, R_{-1} は，ハミルトニアンと正弦的座標のみで決まり，多項式の情報とは無関係であるが，スペクトル $\mathcal{E}(n)$ を通じて，三項関係式の係数を与えている．3 つのポテンシャルについて，これを検証するのは簡単である．生成・消滅演算子は，お互いにエルミート共役 (3.19) になっており，また固有状態に作用するのだということを強調したい．励起状態の固有関数 $\{\phi_n(x)\}$ は基底状態波動関数 $\phi_0(x)$ に，生成演算子を作用させて，順番に得られる，$\phi_n(x) \propto (a^{(+)})^n\phi_0(x)$. これが，ハイゼンベルグ描像での厳密可解性である．

3.3 動力学的対称性代数とコヒーレント状態

ハミルトニアンと生成・消滅演算子は簡単な交換関係

$$[\mathcal{H}, a^{(\pm)}] = a^{(\pm)}\alpha_\pm(\mathcal{H}), \tag{3.22}$$

を満たす．これは，生成・消滅演算子の定義式 (3.18) と閉性関係式 (3.4) から，導かれる:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}a^{(+)}\phi_n(x) = \mathcal{E}(n+1)A_n\phi_{n+1}(x), \quad a^{(+)}\mathcal{H}\phi_n(x) = \mathcal{E}(n)A_n\phi_{n+1}(x),\\
&[\mathcal{H}, a^{(+)}]\phi_n(x) = \alpha_+(\mathcal{E}(n))A_n\phi_{n+1}(x) = a^{(+)}\alpha_+(\mathcal{H})\phi_n(x),\\
&\qquad\qquad \Rightarrow [\mathcal{H}, a^{(\pm)}] = a^{(\pm)}\alpha_\pm(\mathcal{H}).
\end{aligned}$$

生成・消滅演算子 $a^{(\pm)}$ 同士の交換関係は，(3.20) を通じて三項関係式の係数で表される:

$$\begin{aligned}
&a^{(-)}a^{(+)}\phi_n = A_nC_{n+1}\phi_n, \quad a^{(+)}a^{(-)}\phi_n = C_nA_{n-1}\phi_n,\\
&\Rightarrow\ [a^{(-)}, a^{(+)}]\phi_n = (A_nC_{n+1} - A_{n-1}C_n)\phi_n. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

これらは，演算子のレベルでの関係式

$$a^{(-)}a^{(+)} = f(\mathcal{H}), \quad a^{(+)}a^{(-)} = g(\mathcal{H}), \tag{3.24}$$

を意味し，各具体例については，f と g は $\mathcal{H}$ の解析関数として明示的に表される．言い換えるならば，$\mathcal{H}$ と $a^{(\pm)}$ は，**動力学的対称性代数** (dynamical symmetry algebra) を構成する．これはまた，準線形代数 (quasi-linear algebra) と呼ばれることもある．種々の量子力学系の研究において，特に「コヒーレント状態の代数理論」等では，色々な「生成・消滅演算子」が導入される．多くの場合，それらは完全可解性とは異なる枠組みに基づいているので，上で述べたような関係式 (3.22)–(3.24) の成り立つ保証がないことに注意しよう．

消滅演算子の明示的な形 (3.18) に基づいて，その固有ベクトルとしての**コヒーレント状態** (coherent state) が定義できる:

$$a^{(-)}\psi(\lambda, x) = \lambda\psi(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.25}$$

簡単なパラメタ化 $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$（$c_0 = 1$ が全体の規格化を定める）と公式 (3.20) に基づいて，コヒーレント状態の一般の形が得られる:

$$\psi = \psi(\lambda, x) = \phi_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\prod_{k=1}^{n} C_k}\cdot P_n(\eta(x)). \tag{3.26}$$

この形から，コヒーレント状態が直交多項式の母関数と密接に関連していることが判る．論文 [21] に，この定義でのコヒーレント状態の多くの例がある．

3.4 ハイゼンベルグ方程式解の具体例

ハイゼンベルグ演算子解と生成・消滅演算子の実際の内容がどのようなものであるか，典型的な例をいくつか具体的に見てみよう．既に，ニエトー・シモンズ[26]は $1/\sin^2 x$（3.4.3 節），遠心力付きの振動子 (L), $1/\cosh^2 x$ とモースポテンシャルの 4 つの可解な例を議論した．ハイゼンベルグ描像は，シュレーディンガー描像と比べて，古典力学的な描像により近い．正弦的座標について，ポアソン括弧に基づいたハミルトン方程式を解くことは，量子力学的ハイゼンベルグ方程式解を求めることと平行に行く．つまり，閉性関係式は，交換子をポアソン括弧に置き換えても成り立つ．そして，ハミルトン方程式の解は，正弦的座標が実際に正弦運動を行っていることを示している．

3.4.1 H: 調和振動子

この例の内容は，皆よく知られている:

$$\mathrm{H}: \ [\mathcal{H}, x] = -2\frac{d}{dx}, \quad [\mathcal{H}, [\mathcal{H}, x]] = 4x, \quad \alpha_{\pm} = \pm 2,$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(0)\cos 2t - i\frac{d}{dx}(0)\sin 2t,\\
a^{(\pm)} &= \frac{1}{2}\left(x \mp \frac{d}{dx}\right), \quad [a^{(-)}, a^{(+)}] = \frac{1}{2}, \qquad (3.27)\\
a^{(-)}a^{(+)} &= \mathcal{H}/4, \quad a^{(+)}a^{(-)} = (\mathcal{H}+2)/4,
\end{aligned}
$$

コヒーレント状態 $a^{(-)}\psi = \lambda\psi$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi = \lambda\psi\\
&\Rightarrow \psi(\lambda; x) = e^{-(x-2\lambda)^2/2},\\
(3.26) &\Rightarrow \psi(\lambda; x) = \phi_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}H_n(x) = e^{-x^2/2+2\lambda x-\lambda^2}\\
&= e^{\lambda^2}e^{-(x-2\lambda)^2/2}.
\end{aligned}
$$

コヒーレント状態は，$\phi_0(x) = e^{-x^2/2}$ を除いて，エルミート多項式の母関数そのものである．この場合は，閉性関係式は，交換子とポアソン括弧とで同一である．生成消滅演算子 (3.27) については，右辺では $x(0)$, $d/dx(0)$ と記すべきであるが，慣例に従った．以下の例についても同じ．

3.4.2 L: 遠心力付きの振動子，$x^2 + 1/x^2$ ポテンシャル

遠心力障壁のポテンシャル $1/x^2$ が加わると，調和振動子は完全可解性は保つが，運動が半直線（$x > 0$ か $x < 0$）に制限される．これはよく知られたカロジェロ模型[12]の 1 体版である．既に，1.6 節で示したように固有関数はラゲール多項式で記述される，またハミルトニアンと生成消滅演算子が $\mathfrak{su}(1,1)$ 代数を作ることもよく知られている[26]．$\mathfrak{su}(1,1)$ コヒーレント状態もよく知られている．

ポアソン括弧の閉性関係式は簡単で

$$
\{\mathcal{H}, x^2\} = -4px, \quad \{\mathcal{H}, \{\mathcal{H}, x^2\}\} = 8\mathcal{H}' - 16x^2, \quad \mathcal{H}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H} + 1 + 2g,
$$

単純な正弦運動の解を与える:

$$
x^2(t) = x^2(0)\,\cos 4t + \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\mathcal{H}'_0 + p(0)x(0)\sin 4t.
$$

ハミルトニアンは時間に依らないので，$\mathcal{H}'_0 = \mathcal{H}' = p(0)^2 + g(g-1)/x(0)^2$ となる．右辺が正 $x^2(t) > 0$ であるのを確認するのは易しい．量子論の解は古典論の解とほとんど同じである:

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{H}, x^2] = -2i(xp + px), \ [\mathcal{H}, [\mathcal{H}, x^2]\,] = 16(x^2 - \mathcal{H}'/2),\\
&e^{it\mathcal{H}}x^2e^{-it\mathcal{H}} = x^2\cos 4t + \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\mathcal{H}' + (xp + px)/2\,\sin 4t.
\end{aligned}
$$

これから生成消滅演算子が得られる:

$$a^{(\pm)} = (x^2 - \mathcal{H}'/2)/2 \mp i(xp+px)/4 = \left(\left(\frac{d}{dx} \mp x\right)^2 - \frac{g(g-1)}{x^2}\right) / 4. \tag{3.28}$$

これらの演算子の固有関数に対する作用は $(\alpha = g - 1/2)$

$$a^{(-)}\phi_n = -(n+\alpha)\phi_{n-1}, \quad a^{(+)}\phi_n = -(n+1)\phi_{n+1},$$

ラゲール多項式の三項関係式と一致する:

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(\eta) + (\eta - 2n - \alpha - 1)L_n^{(\alpha)}(\eta) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(\eta) = 0.$$

これらから $\mathfrak{su}(1,1)$ 関係式が出てくる:

$$[\mathcal{H}, a^{(\pm)}] = \pm 4a^{(\pm)}, \quad [a^{(-)}, a^{(+)}] = \frac{1}{2}\mathcal{H}' = \frac{1}{2}\mathcal{H} + g + 1/2.$$

コヒーレント状態 (3.26) は，簡単に得られる:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{(\alpha+1)_n}\,\phi_n(x) = \phi_0(x)\frac{e^{-\lambda}\Gamma(\alpha+1)}{(-x^2\lambda)^{\alpha/2}} J_\alpha(2x\sqrt{-\lambda}).$$

これは，ラゲール多項式の母関数[6]

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(\alpha+1)_n} L_n^{(\alpha)}(x) &= e^t\,{}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \alpha+1 \end{matrix}\,\middle|\, -xt\right) \\ &= \Gamma(\alpha+1)(xt)^{-\alpha/2} e^t J_\alpha(2\sqrt{xt})\end{aligned}$$

が，超幾何関数 ${}_0F_1$ (A.6) およびベッセル関数 $J_\alpha(x)$ であることによる．

消滅および生成演算子 (3.28) は，ハミルトニアンの因子 $\mathcal{H} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ で因子化される:

$$\begin{aligned}4a^{(-)} &= \left(\frac{d}{dx} + x + \frac{g}{x}\right)\cdot\mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = i(p - ix + ig/x), \\ 4a^{(+)} &= \mathcal{A}^\dagger\cdot\left(-\frac{d}{dx} + x + \frac{g}{x}\right), \quad \mathcal{A}^\dagger = -i(p + ix - ig/x).\end{aligned}$$

他の因子の作用は，演算子 $\mathcal{A}^\dagger$ と $\mathcal{A}$ によってずれたパラメタ (2.8)–(2.9) を戻す:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{d}{dx} + x + \frac{g}{x}\right)\phi_n(x\,;g) &= 2\,\phi_n(x\,;g+1), \\ \left(\frac{d}{dx} + x + \frac{g}{x}\right)\phi_n(x\,;g+1) &= (2n+2g+1)\,\phi_n(x\,;g).\end{aligned}$$

3.4.3 $1/\sin^2 x$ ポテンシャル

このポテンシャルおよびハミルトニアン，固有関数などは 2.3.1 節で導入した．生成・消滅演算子の具体形が準位 n に依存する最も簡単な例である．対応するコヒーレント状態は，(3.31) あるいは (3.33) である．

古典的ハミルトン方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} = \{\mathbf{A}(t), \mathcal{H}\} = -(\mathrm{ad}\mathcal{H})\mathbf{A}(t)$$
$$\Rightarrow \mathbf{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n \mathbf{A}(0).$$

ポアソン括弧の計算はすぐにできて ($\mathcal{H}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H} + g^2$),

$$\{\mathcal{H}, \cos x\} = 2p\sin x,\ \{\mathcal{H}, \{\mathcal{H}, \cos x\}\} = -\cos x\ 4\mathcal{H}',$$

初期値問題の解は

$$\cos x(t) = \cos x(0)\cos\left[2t\sqrt{\mathcal{H}'}\,\right] - p(0)\sin x(0)\frac{\sin\left[2t\sqrt{\mathcal{H}'}\,\right]}{\sqrt{\mathcal{H}'}}.$$

ハミルトニアンは時間に依らないので，$\mathcal{H}' = \mathcal{H}_0' = p(0)^2 + g(g-1)/(\sin x(0))^2$ となる．$\eta(x) = \cos x$ が，正弦運動を行うことは明白である．また，$|\cos x(t)| \le 1$ はすぐに確認できる．対応する量子力学的な表式は

$$\alpha_{\pm}(\mathcal{H}) = 1 \pm 2\sqrt{\mathcal{H}'},$$
$$e^{it\mathcal{H}}\cos x\, e^{-it\mathcal{H}} = (2i\sin x \cdot p + \cos x)\frac{e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t} - e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}}{4\sqrt{\mathcal{H}'}}$$
$$+ \cos x\,\frac{-\alpha_-(\mathcal{H})e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t} + \alpha_+(\mathcal{H})e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}}{4\sqrt{\mathcal{H}'}}.$$

消滅および生成演算子は

$$a'^{(\pm)} = a^{(\pm)}2\sqrt{\mathcal{H}'} = \pm i\sin x \cdot p + \cos x \cdot \sqrt{\mathcal{H}'}$$
$$= \pm\sin x \cdot \frac{d}{dx} + \cos x \cdot \sqrt{\mathcal{H}'}.$$

これら $a'^{(\pm)}$ が，互いにエルミート共役になっていないことは明らかである．$\mathcal{E}(n) + g^2 = (n+g)^2$ となるので，$a'^{(\pm)}$ が固有関数 ϕ_n に作用するときには，2 重根号がきれいに取れる:

$$a'^{(-)}\phi_n = -\sin x \cdot \frac{d\phi_n}{dx} + (n+g)\cos x \cdot \phi_n = (n+g-1/2)\phi_{n-1}, \quad (3.29)$$
$$a'^{(+)}\phi_n = \sin x \cdot \frac{d\phi_n}{dx} + (n+g)\cos x \cdot \phi_n = \frac{2(n+1)(n+2g)}{2n+2g+1}\phi_{n+1}. \quad (3.30)$$

これは例外でなく，隣り合うエネルギー準位の間の関係 (3.9), (3.10) から出てくる一般的な結果である．特に，基底状態 ϕ_0 に作用する場合は，消滅演算子 ($a'^{(-)}$) と生成演算子 ($a'^{(+)}$) は，ハミルトニアン $\mathcal{H} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ の各因子 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}^\dagger$ にそれぞれ比例する:

$$a'^{(-)}\phi_0 = \left(-\sin x\frac{d}{dx} + g\cos x\right)\phi_0 = -\sin x\left(\frac{d}{dx} - g\cot x\right)\phi_0$$
$$= \eta'(x)\mathcal{A}\phi_0 = 0,$$

$$a'^{(+)}\phi_0 = \big(\sin x\frac{d}{dx} + g\cos x\big)\phi_0 = -\sin x\big(-\frac{d}{dx} - g\cot x\big)\phi_0$$
$$= \eta'(x)\mathcal{A}^\dagger\phi_0.$$

荒っぽい言い方では，生成演算子の中の因子 $\eta'(x) = -\sin x$ が，$\mathcal{A}^\dagger$ によって引き起こされたパラメタ (g) の下向きのずれを修正する．似たような状況がすべての量子系で起こる．特に，等間隔のスペクトル $\mathcal{E}_n = an$ (a : 定数) を持つ系では，$a'^{(-)}$ と $a'^{(+)}$ の $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}^\dagger$ への因子化は準位 n に依らない．

次の興味深い交換関係は，(3.29) と (3.30) から導かれる:

$$[\mathcal{H}, a'^{(\pm)}] = \pm\big(\sqrt{\mathcal{H}'}\,a'^{(\pm)} + a'^{(\pm)}\sqrt{\mathcal{H}'}\,\big),$$
$$[a'^{(-)}, a'^{(+)}] = 2\sqrt{\mathcal{H}'},$$
$$a'^{(-)}a'^{(+)} + a'^{(+)}a'^{(-)} = 2\mathcal{H} + 2g.$$

(3.29) と (3.30) とを，基底状態固有関数 $\phi_0(x) = (\sin x)^g$ を用いて相似変換することにより，ゲーゲンバウアー（ヤコビ）多項式の上ずらし，下ずらし演算子が得られる $(\alpha = g - 1/2)$:

$$\text{down} : (1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}P_n^{(\alpha,\alpha)}(\eta) + n\eta P_n^{(\alpha,\alpha)}(\eta) = (n+\alpha)P_{n-1}^{(\alpha,\alpha)}(\eta),$$
$$\text{up} : -(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}P_n^{(\alpha,\alpha)}(\eta) + (n+2g)\eta P_n^{(\alpha,\alpha)}(\eta)$$
$$= \frac{2(n+1)(n+2g)}{2n+2g+1}P_{n+1}^{(\alpha,\alpha)}(\eta).$$

右辺は，同じヤコビ多項式の $n-1$ 次と $n+1$ 次になっている．これらの上下ずらし演算子は，生成・消滅演算子から自然に得られたもので，三項関係式の明示的な形を仮定したものではないことを，もう一度強調しよう．

コヒーレント状態 ψ ((3.25) 式)

$$\psi(x) = \phi_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}(2\lambda)^n\frac{(\alpha+3/2)_n}{(\alpha+1)_n}P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos x)$$
$$= \phi_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}(2\lambda)^n\frac{(g+1)_n}{(2g)_n}C_n^{(g)}(\cos x),$$

の導出には，$a^{(-)}\phi_n = a'^{(-)}\phi_n/(2(n+g))$, (3.29) と (2.24) を用いた．ゲーゲンバウアー多項式の母関数 (γ: 任意)[6],

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n\frac{(\gamma)_n}{(2g)_n}C_n^{(g)}(\eta) = (1-\eta t)^{-\gamma}\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}\gamma/2, (\gamma+1)/2\\ g+1/2\end{matrix}\;\Big|\;\frac{(\eta^2-1)t}{(1-\eta t)^2}\Big),$$

がコヒーレント状態 ψ の簡潔な表示を与える:

$$\psi(x) = (1-2\lambda\cos x)^{-g-1}\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}(g+1)/2, g/2+1\\ g+1/2\end{matrix}\;\Big|\;\frac{-2\lambda\sin^2 x}{(1-2\lambda\cos x)^2}\Big). \tag{3.31}$$

ここで ${}_2F_1$ は超幾何関数である ((A.6)). もう 1 つの消滅演算子 $a'^{(-)}$ に対応するコヒーレント状態 ψ' は

$$\psi'(x) = \phi_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(\alpha+1)_n} P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos x)$$
$$= \phi_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(2g)_n} C_n^{(g)}(\cos x), \tag{3.32}$$

となる. ゲーゲンバウアー多項式の別の母関数[6]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(2g)_n} C_n^{(g)}(\eta) = e^{\eta t} {}_0F_1\Big(\begin{matrix} - \\ g+1/2 \end{matrix} \Big| \frac{(\eta^2-1)t^2}{4} \Big),$$

を使って, ψ' の簡潔な表示 ($\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g - 1/2$)

$$\psi'(x) = \Gamma(\alpha+1)\, e^{\lambda \cos x} (\lambda/2)^{-\alpha} \sqrt{\sin x}\, J_\alpha(\lambda \sin x), \tag{3.33}$$

が得られる. ここで, $J_\alpha(x)$ はベッセル関数である.

3.5 ボッホナーの定理

1884 年に, ラウス (Routh)[27]が「三項関係式を満たす多項式で, 2 階の微分方程式を満たすものは古典直交多項式のいずれか, つまり, エルミート, ラゲール, ヤコビ, ベッセル多項式のいずれか」であることを示した. 後に, 1929 年になって, ボッホナー (Bochner)[28]が, 多項式係数を持つ 2 階のスツルム・リューヴィル方程式のすべての多項式解を分類して, 同じ結論に達した.

ボッホナーの定理は, 次のように述べられる. もし, 直交多項式 $\{p_n(x)\}$ が, 2 階の微分方程式

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda_n y = 0,$$

を満たすならば, それらは古典直交多項式である. まず, $y = p_0(x)$ =const. $\Rightarrow \lambda_0 = 0$. 1 次の多項式 $y = p_1(x) \Rightarrow \deg(\tau(x)) \le 1$. 2 次の多項式 $y = p_2(x)$ $\Rightarrow \deg(\sigma(x)) \le 2$:

- $\deg(\sigma(x)) = 2$, 2 重根 ($x = 0$) $\Rightarrow$ ベッセル
- $\deg(\sigma(x)) = 2$, 異なる根 ($x = \pm 1$) $\Rightarrow$ ヤコビ
- $\deg(\sigma(x)) = 1$ $\Rightarrow$ ラゲール
- $\deg(\sigma(x)) = 0$ $\Rightarrow$ エルミート.

これは, 1 次元量子力学にとって, ある意味での No-Go 定理であった. というのも, 通常のシュレーディンガー方程式の解として, 因子化された固有関数 (1.62) で n が多項式の次数になるようなもので, 本質的に新しいものは存

在しないことを宣言しているからである．すべての No-Go 定理は，前提のもとに成り立っているので，それを取り払うか変更するかによって，道は開けてくる．ボッホナーの定理を回避することが，(q)Askey-scheme の超幾何直交多項式[4]~[6] 発見の大きな動機の一つとなったと考えてよいだろう．**離散量子力学** (discrete QM) はこれら Askey-scheme の古典直交多項式を量子力学的な枠組みの中で再構成するために誕生した．離散量子力学では，シュレーディンガー方程式は，2 階の微分方程式が差分方程式に置き換わり，ボッホナーの定理が適用されなくなる．数多くの厳密可解な離散量子力学系の例が作られている[29]~[31]．離散量子力学は第 6 章以後で詳述する．

通常の 1 次元 QM で，ボッホナーの定理を回避する一つの簡単な方法は，1.4 節で論じたクラムの定理の拡張（クライン・アドラー変換）を，1.6 節で導入した古典直交多項式 H, L, J (1.63)–(1.65) に適用することである．削除する固有関数の準位の集合 $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{d_1, d_2, \ldots, d_M\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^M$, $\mathcal{D} \neq \{0, 1, \ldots, M-1\}$ を使うと，クライン・アドラー変換で得られる固有関数は

$$
\begin{aligned}
\bar{\phi}_{\mathcal{D};n}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{W}[\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_n](x)}{\mathrm{W}[\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \ldots, \phi_{d_M}](x)} = \psi_{\mathcal{D}}(x) \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{D};n}(\eta)}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)}, \\
\psi_{\mathcal{D}}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_0(x) \left(\eta'(x)\right)^M, \qquad \eta'(x) \equiv d\eta(x)/dx, \\
\Xi_{\mathcal{D}}(\eta) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{W}[P_{d_1}, P_{d_2}, \ldots, P_{d_M}](\eta), \\
\mathcal{P}_{\mathcal{D};n}(\eta) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{W}[P_{d_1}, P_{d_2}, \ldots, P_{d_M}, P_n](\eta),
\end{aligned}
$$

となる．ここで，公式 (1.24)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}[f_1(\eta(x)), f_2(\eta(x)), \ldots, f_n(\eta(x))](x) \\
&\quad = \left(\eta'(x)\right)^{n(n-1)/2} \mathrm{W}[f_1, f_2, \ldots, f_n](\eta)
\end{aligned}
$$

を使った．この $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)$ と $\mathcal{P}_{\mathcal{D};n}(\eta)$ は，η の次数 ℓ_D と $\ell_{\mathcal{D}} + n - M$ の多項式である：$\ell_{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^M d_j - M(M-1)/2 \geq M$．変形された系の固有関数は，$(x_1, x_2)$ の上での直交多項式系 $\{\mathcal{P}_{\mathcal{D};n}(\eta)\}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \backslash \mathcal{D}$ で，2 階の微分方程式を満たしている．重み関数は，$W_{\mathcal{D}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mathcal{D}}^2(x)/\Xi_{\mathcal{D}}^2(\eta)$ となる．これらの多項式は，その次数のうち，M 個の「穴」$n = d_j$, $j = 1, \ldots, M$ が空いている．そして，最低次は $\ell_{\mathcal{D}} + \mu - M \geq 0$ となり，μ は (1.38) で与えられる．これらは，当然ながら三項関係式を満たさない．

最も簡単な例は，調和振動子ポテンシャル H で，$\mathcal{D} = \{1, 2\}$ とするもので，$W_{\mathcal{D}}(x) \propto e^{-x^2}/(1+2x^2)^2$ は，アドラー[17]によって得られた．その少し前にデュボフ達[32]によって同じものが得られたが，それは，擬仮想状態解 $\tilde{\phi}_2(x)$ (4.8) を削除したものであった．1.7.1 節の (1.80) がアドラーの仕事を，1.7.2 節の (1.87) がデュボフ達の結果を再現している．これは，4.4 節で論じる擬仮想状態と固有状態との**双対性**の一番簡単な例になっている．

この話の筋で行くと，ボッホナーの定理を回避することのできる2階の微分方程式を満たす直交多項式系は，もしその次数に「穴」を持たないならば，次数$\ell \geq 1$から始まるものでなければならない．これで，三項関係式(3.2)は満たさなくなる．ゴメス·ウジャテ，カムランとミルソン (Gomez-Ullate, Kamran, Milson) はそのような追求の結果，2008年に**例外直交多項式** (exceptional orthogonal polynomials)[33]を発表した．$\ell = 1$次から始まるラゲールおよびヤコビ多項式の変形である．これらは，簡潔にX_1ラゲール，およびX_1ヤコビ多項式と呼ばれた．その直後にケンヌ (Quesne)[34]が，それらが形状不変な量子力学系，つまり有理変形された遠心力付きの振動子および有理変形されたポッシェル・テラーポテンシャルの固有関数をなすことを明らかにした．約1年後に，小竹と佐々木が，すべての正整数ℓについて，ℓ次から始まる(X_ℓ)例外ラゲールおよびヤコビ多項式を構成した[35]．同じ頃にケンヌが，X_2例外ラゲール多項式に2つの型があることを示した[36]．数ヶ月後に，I型，II型のX_ℓラゲールおよびヤコビ多項式が，すべての正整数ℓについて作られた[37]．$\ell = 1$の場合には，I型とII型は縮退している．この話題は，多くの研究者達を引きつけ，多方面にわたる活発な研究が数年間継続した．本書ではその全容は紹介できないが，中心を成す**多添え字直交多項式系** (multi-indexed orthogonal polynomials) に焦点を当てて，次章で展開する．

第 4 章
新しい直交多項式

この章では，歴史的発展を追うのではなく，論理的構造に固執して，2 階の微分方程式を満たす新しい直交多項式の無限個の例を示そう．中心となるのは，多添え字ラゲールおよびヤコビ多項式系で，例外ラゲールおよびヤコビ多項式系は，その最も簡単な 1 添え字の場合として含まれる．元々の固有関数系から離散対称性変換で得られた仮想状態波動関数が，多重ダルブー変換を行う際の多項式型の種解として中心的役割を担う．言うまでもないことだが，得られた多添え字直交多項式系に，クライン・アドラー変換を施して，次数に「穴」を空ければ更に新しい直交多項式系が得られる．

4.1 離散対称性と多項式種解

可解なポテンシャルを有理的に拡張（変形）する場合には，**多項式型の種解**が必要になる．既に何度も見てきたように，これらは前因子 ($\phi_0(x)$) と多項式の積として表される元々のシュレーディンガー方程式の解 (1.62) である．ここで使う多項式型の種解には，3 つの種類があり，それらは**仮想状態波動関数** (virtual state wavefunctions)，**擬仮想状態波動関数** (pseudo virtual state wavefunctions)，**飛び越し固有関数** (overshoot eigenfunctions) とそれぞれ呼ばれている．飛び越し固有関数は，可解な散乱問題の変形の章（5.3 節）で扱う．

次に述べる条件を満たす種解 $\{\varphi_j(x),\tilde{\mathcal{E}}_j\}$ $(j=1,2,\ldots,M)$ を仮想状態波動関数と呼ぶ:

1. $x_1<x<x_2$ に零点無し，つまり同区間内で $\varphi_j(x)>0$ 或いは $\varphi_j(x)<0$.
2. 負のエネルギー $\tilde{\mathcal{E}}_j<0$.
3. $\varphi_j(x)$ は多項式型の解.
4. 2 乗可積分でない，$(\varphi_j,\varphi_j)=\infty$.
5. 逆数も 2 乗可積分でない，$(\varphi_j^{-1},\varphi_j^{-1})=\infty$.

これらの条件は，全部が独立ではない．負のエネルギー条件が，ダルブー変

換後のノルムが正定値であるために必要なことは，ノルムの公式 (1.44) から判る．

最初の条件は要求しないで，逆数が両方の境界で局所 2 乗可積分であること (4.3) を満たし，残りの条件 2–4 も満たすものを擬仮想状態波動関数と呼ぶ．系が擬仮想状態波動関数 $\varphi_j(x)$ を用いて拡張された場合には，もし新しいポテンシャルが非特異ならば，新しいハミルトニアン $\mathcal{H}^{(1)}$ には元の基底状態より低いエネルギー $\tilde{\mathcal{E}}_j$ を持った余分な固有状態 $\varphi_j^{-1}(x)$ が生じる．このために，新しいハミルトニアンは元のハミルトニアンとは，等スペクトルでなくなる．これは，(1.52) の帰結である．この場合には，新しいハミルトニアン $\mathcal{H}^{(1)}$ が非特異になる保証はない．M 個の擬仮想状態波動関数 $\{\varphi_j(x), \tilde{\mathcal{E}}_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, M)$ (1.47) を用いて拡張された場合には，ポテンシャル $U^{(M)}(x)$ (1.58) が非特異ならば，得られたハミルトニアン $\mathcal{H}^{(M)}$ (1.58) は M 個の余分な固有状態 $\breve{\varphi}_j^{(M)}(x)$ (1.55) を持つ．それらは，すべて元の基底状態より下に現れる．

種解 $\varphi_j(x)$ は区間 $x_1 < x < x_2$ 内部で連続なので，2 乗可積分でなくなるのは，境界で起こるのみである．従って，仮想状態波動関数は次の 2 つの型，I 型と II 型のどちらかになる:

$$
\begin{aligned}
\text{I 型 仮想}: &\int_{x_1}^{x_1+\epsilon} dx\,\varphi_j(x)^2 < \infty, \qquad \int_{x_2-\epsilon}^{x_2} dx\,\varphi_j(x)^2 = \infty,\\
&\ \&\ \int_{x_1}^{x_1+\epsilon} dx\,\varphi_j(x)^{-2} = \infty, \quad \int_{x_2-\epsilon}^{x_2} dx\,\varphi_j(x)^{-2} < \infty, \qquad (4.1)\\
\text{II 型 仮想}: &\int_{x_1}^{x_1+\epsilon} dx\,\varphi_j(x)^2 = \infty, \qquad \int_{x_2-\epsilon}^{x_2} dx\,\varphi_j(x)^2 < \infty,\\
&\ \&\ \int_{x_1}^{x_1+\epsilon} dx\,\varphi_j(x)^{-2} < \infty, \quad \int_{x_2-\epsilon}^{x_2} dx\,\varphi_j(x)^{-2} = \infty, \qquad (4.2)\\
\text{擬仮想}: &\int_{x_1}^{x_1+\epsilon} dx\,\varphi_j(x)^2 = \infty \quad \text{or} \quad \int_{x_2-\epsilon}^{x_2} dx\,\varphi_j(x)^2 = \infty,\\
&\ \&\ \int_{x_1}^{x_1+\epsilon} dx\,\varphi_j(x)^{-2} < \infty, \quad \int_{x_2-\epsilon}^{x_2} dx\,\varphi_j(x)^{-2} < \infty. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

境界点が無限大の時，$x_2 = +\infty$ and/or $x_1 = -\infty$ には，適当な修正が必要になる．

4.1.1 L, J の仮想状態波動関数

遠心力付きの振動子 (L) (1.60) とポッシェル・テラーポテンシャル (J) (1.61) の仮想状態波動関数の具体形を示そう．これらは，固有関数 (1.62), (1.64)–(1.65) に離散対称性変換（パラメタのひねり）(1.77) と L についての (1.79) を施して得られる．多項式部分の次数が v である L の仮想状態波動関数は

$$
\text{L1}: \quad \tilde{\phi}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{v}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{\frac{1}{2}x^2} x^g \xi^{\mathrm{I}}_{\mathrm{v}}(\eta(x); g), \quad \xi^{\mathrm{I}}_{\mathrm{v}}(\eta; g) \stackrel{\mathrm{def}}{=} P_{\mathrm{v}}(-\eta; g),
$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\rm v}^{\rm I} \stackrel{\rm def}{=} -4(g+{\rm v}+\tfrac{1}{2}), \quad {\rm v}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\rm I} \stackrel{\rm def}{=} 1, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} {\rm L2}: \quad & \tilde{\phi}_{\rm v}^{\rm II}(x) \stackrel{\rm def}{=} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{1-g} \xi_{\rm v}^{\rm II}(\eta(x);g), \quad \xi_{\rm v}^{\rm II}(\eta;g) \stackrel{\rm def}{=} P_{\rm v}(\eta;1-g), \\ & \tilde{\mathcal{E}}_{\rm v}^{\rm II} \stackrel{\rm def}{=} -4(g-{\rm v}-\tfrac{1}{2}), \ \ {\rm v}=0,1,\ldots,[g-\tfrac{1}{2}]', \ \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\rm II} \stackrel{\rm def}{=} -1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで $[a]'$ は，a 未満の最大の整数を指し，記号 $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\rm I,II}$ は後で使う．$\xi_{\rm v}^{\rm I,II}$ が零点を持たないことについては，[38] の (2.39) 参照．具体例を 4.3.1 で示す．同様に，多項式部分の次数が v である J の仮想状態波動関数は

$$\begin{aligned} {\rm J1}: & \ \tilde{\phi}_{\rm v}^{\rm I}(x) \stackrel{\rm def}{=} (\sin x)^g (\cos x)^{1-h} \xi_{\rm v}^{\rm I}(\eta(x);g,h), \ \ \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\rm I} \stackrel{\rm def}{=} (1,-1), \\ & \ \xi_{\rm v}^{\rm I}(\eta;g,h) \stackrel{\rm def}{=} P_{\rm v}(\eta;g,1-h), \\ & \ \tilde{\mathcal{E}}_{\rm v}^{\rm I} \stackrel{\rm def}{=} -4(g+{\rm v}+\tfrac{1}{2})(h-{\rm v}-\tfrac{1}{2}), \quad {\rm v}=0,1,\ldots,[h-\tfrac{1}{2}]', \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} {\rm J2}: & \ \tilde{\phi}_{\rm v}^{\rm II}(x) \stackrel{\rm def}{=} (\sin x)^{1-g} (\cos x)^{h} \xi_{\rm v}^{\rm II}(\eta(x);g,h), \ \ \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\rm II} \stackrel{\rm def}{=} (-1,1), \\ & \ \xi_{\rm v}^{\rm II}(\eta;g,h) \stackrel{\rm def}{=} P_{\rm v}(\eta;1-g,h), \\ & \ \tilde{\mathcal{E}}_{\rm v}^{\rm II} \stackrel{\rm def}{=} -4(g-{\rm v}-\tfrac{1}{2})(h+{\rm v}+\tfrac{1}{2}), \quad {\rm v}=0,1,\ldots,[g-\tfrac{1}{2}]'. \end{aligned} \tag{4.7}$$

パラメタ g あるいは h が大きくなると，それだけ利用可能な仮想状態波動関数が多くなる．L1 系は，J1 系から $h\to\infty$ の極限で得られる．これが，L1 系で無限個の仮想状態波動関数が存在する理由である．記号 $\mathcal{V}^{\rm I,II}$ で，L と J の I 型と II 型の仮想状態波動関数の準位の集合を表そう．ヤコビ多項式の鏡映性 $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$ のために，J の I 型と II 型の仮想状態波動関数 $\xi_{\rm v}^{\rm I}$ と $\xi_{\rm v}^{\rm II}$ が，$\xi_{\rm v}^{\rm II}(-\eta;g,h)=(-1)^{\rm v}\xi_{\rm v}^{\rm I}(\eta;h,g)$ のように関係している．$\xi_{\rm v}^{\rm I,II}$ が零点を持たないことについては，[38] の (2.40) および [39] の (3.2) 参照．ラベルが 0 のものは，$\xi_0^{\rm I,II}=1$ で，I 型と II 型に $\tilde{\phi}_0^{\rm I}(x;\boldsymbol{\lambda})\tilde{\phi}_0^{\rm II}(x;\boldsymbol{\lambda})=c_{\mathcal{F}}^{-1}\frac{d\eta(x)}{dx}$ の関係があるので，特別である．ここで，定数 $c_{\mathcal{F}}$ は L では $c_{\mathcal{F}}=2$，J では $c_{\mathcal{F}}=-4$ である（(2.18)）．ラベルが 0 のものは，削除する仮想状態波動関数としては用いないことにする．

次に，第 1 段階の仮想状態波動関数 $\{\tilde{\phi}_{\rm v}^{(1)}(x)\}$ (1.50) が，内部では零点を持たないことを示そう．もとの仮想状態波動関数 $\{\tilde{\phi}_{\rm v}(x)\}$ のシュレーディンガー方程式を使うと，ロンスキアンの微分が

$$\partial_x {\rm W}[\tilde{\phi}_d,\tilde{\phi}_{\rm v}](x) = \big(\tilde{\mathcal{E}}_d-\tilde{\mathcal{E}}_{\rm v}\big)\tilde{\phi}_d(x)\tilde{\phi}_{\rm v}(x),$$

となる．これは定符号で零点を持たない．v と d の両方とも同じ型であるならば，${\rm W}[\tilde{\phi}_d,\tilde{\phi}_{\rm v}](x)$ は，どちらかの境界で 0 になる．そして導関数が定符号なので，${\rm W}[\tilde{\phi}_d,\tilde{\phi}_{\rm v}](x)$ は内部で零点を持たない．v と d が異なる型である場合には，ロンスキアンは境界で 0 にならないこともある．その場合には，両方の境界で同じ符号 $W[\tilde{\phi}_d,\tilde{\phi}_{\rm v}](x_1)W[\tilde{\phi}_d,\tilde{\phi}_{\rm v}](x_2)>0$ を持つことが示せる．同様にして，この節の具体例について，$\tilde{\phi}_{\rm v}^{(1)}$ と $1/\tilde{\phi}_{\rm v}^{(1)}$ が無限大のノルムを持つこと

が示せる．次の $\mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$ 過程やその次についても，本質的に同じ状況である．後の図 4.1 に仮想状態波動関数の削除の概略的状況を示してある．

4.1.2 擬仮想状態波動関数

調和振動子 (H), 遠心力付きの振動子 (L) とポッシェル・テラーポテンシャル (J) の擬仮想状態波動関数は以下の通り．これらは，固有関数 (1.63)–(1.65) に離散対称性変換，H では $x \to ix$ (1.78), L については $g \to 1-g$ (1.77) と $x \to ix$ (1.79) を同時に，J については $g \to 1-g$ と $h \to 1-h$ (1.77) とを同時に作用させて得られる：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}: \quad & \tilde{\phi}_{\mathrm{v}} \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{1}{2}x^2}\xi_{\mathrm{v}}(x), \quad \xi_{\mathrm{v}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} i^{-\mathrm{v}}H_{\mathrm{v}}(ix), \\
& \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}} \stackrel{\text{def}}{=} -2(\mathrm{v}+1) = \mathcal{E}\left(-(\mathrm{v}+1)\right), \quad \mathrm{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}} \stackrel{\text{def}}{=} 1, \qquad (4.8) \\
\mathrm{L}: \quad & \tilde{\phi}_{\mathrm{v}} \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{1}{2}x^2}x^{1-g}\xi_{\mathrm{v}}(\eta(x);g), \quad \xi_{\mathrm{v}}(\eta;g) \stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathrm{v}}(-\eta;1-g), \\
& \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}} \stackrel{\text{def}}{=} -4(\mathrm{v}+1) = \mathcal{E}\left(-(\mathrm{v}+1)\right), \quad \mathrm{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}} \stackrel{\text{def}}{=} 1, \qquad (4.9) \\
\mathrm{J}: \quad & \tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\sin x)^{1-g}(\cos x)^{1-h}\xi_{\mathrm{v}}(\eta(x);g,h), \quad \mathrm{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\
& \xi_{\mathrm{v}}(\eta;g,h) \stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathrm{v}}(\eta;1-g,1-h), \qquad \tilde{\boldsymbol{\delta}} \stackrel{\text{def}}{=} (1,1), \\
& \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}} \stackrel{\text{def}}{=} -4(\mathrm{v}+1)(g+h-\mathrm{v}-1) = \mathcal{E}\left(-(\mathrm{v}+1)\right). \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

ここで前と同様に，v は多項式部分の次数を表す．

4.2 多添え字直交多項式

ここで，多重ダルブー変換による多添え字ラゲールおよびヤコビ多項式導出の一般論を展開する[40]．基本的な公式は (1.54) で，1.5 節にある**定理 1.2** に述べてある．

2 種類の仮想状態波動関数を使うことになるので，一般の削除は $M+N$ 個の正整数の組 $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{d_1^{\mathrm{I}}, \ldots, d_M^{\mathrm{I}}, d_1^{\mathrm{II}}, \ldots, d_N^{\mathrm{II}}\}$, $d_j^{\mathrm{I,II}} \geq 1$ で指定される．すべての仮想状態波動関数が有効になるためには，パラメタ g と h が，適当な値より大きくなることが必要である：

$$
\mathrm{L}: \quad g > \max\{N + \tfrac{3}{2}, d_j^{\mathrm{II}} + \tfrac{1}{2}\}, \qquad (4.11)
$$

$$
\mathrm{J}: \quad g > \max\{N + 2, d_j^{\mathrm{II}} + \tfrac{1}{2}\}, \quad h > \max\{M + 2, d_j^{\mathrm{I}} + \tfrac{1}{2}\}. \qquad (4.12)
$$

種解の具体形が (4.4)–(4.7) で与えられたので，多重ダルブー変換後のポテンシャルの具体形は (1.58) の，固有関数の具体形は (1.54) のロンスキアンを評価して得られる．この時，多項式部分のロンスキアンは，正弦的座標 η のロンスキアンに帰着させる．元々の固有関数 (1.62) と同様に，仮想状態削除後の n 番目の固有関数 $\phi_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}) \equiv \phi_n^{[M,N]}(x)$ は，x に依存する部分，変数 η の共

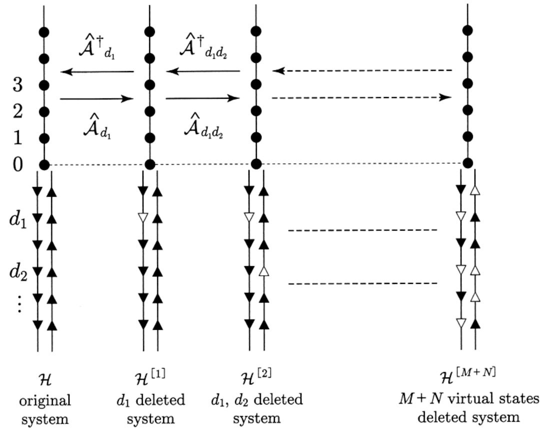


図 4.1　仮想状態波動関数削除の概念図．黒い円は固有状態を指す．下向きと上向きの三角形は，I 型と II 型の仮想状態を表す．白い三角形は削除された仮想状態を示している．

通の**分母多項式** $\Xi_{\mathcal{D}}$ と変数 η の**多添え字多項式** $P_{\mathcal{D},n}$ に因子化される:

$$\phi_n^{[M,N]}(x) \equiv \phi_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = c_{\mathcal{F}}^{M+N}\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})P_{\mathcal{D},n}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}), \tag{4.13}$$

$$\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M,N]})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})}. \tag{4.14}$$

ここで $\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})$ は元の系の基底状態固有関数 (1.60)–(1.61) である．$[M,N]$ で決まる削除によってずれたパラメタ $\boldsymbol{\lambda}^{[M,N]}$ は $\boldsymbol{\lambda}^{[M,N]} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\lambda} + M\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\text{I}} + N\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\text{II}}$ と書ける．より具体的には:

$$\text{L:}\quad \boldsymbol{\lambda}^{[M,N]} = g + M - N,$$
$$\text{J:}\quad \boldsymbol{\lambda}^{[M,N]} = (g + M - N, h - M + N).$$

多項式 $P_{\mathcal{D},n}(\eta)$ と $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)$ は，変数 η のロンスキアンで表される:

$$P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{W}[\mu_1,\ldots,\mu_M,\nu_1,\ldots,\nu_N,P_n](\eta) \times \begin{cases} e^{-M\eta}\,\eta^{(M+g+\frac{1}{2})N} & :\text{L} \\ \left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{(M+g+\frac{1}{2})N}\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{(N+h+\frac{1}{2})M} & :\text{J} \end{cases}, \tag{4.15}$$

$$\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{W}[\mu_1,\ldots,\mu_M,\nu_1,\ldots,\nu_N](\eta) \times \begin{cases} e^{-M\eta}\,\eta^{(M+g-\frac{1}{2})N} & :\text{L} \\ \left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{(M+g-\frac{1}{2})N}\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{(N+h-\frac{1}{2})M} & :\text{J} \end{cases}, \tag{4.16}$$

$$\mu_j = \begin{cases} e^{\eta}\xi_{d_j^{\rm I}}^{\rm I}(\eta; g) & : {\rm L} \\ \left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{\frac{1}{2}-h}\xi_{d_j^{\rm I}}^{\rm I}(\eta; g, h) & : {\rm J} \end{cases}, \tag{4.17}$$

$$\nu_j = \begin{cases} \eta^{\frac{1}{2}-g}\xi_{d_j^{\rm II}}^{\rm II}(\eta; g) & : {\rm L} \\ \left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{\frac{1}{2}-g}\xi_{d_j^{\rm II}}^{\rm II}(\eta; g, h) & : {\rm J} \end{cases}. \tag{4.18}$$

ここで，(4.15) の P_n は元々の多項式を指す．L ではラゲール多項式 $P_n(\eta; g) \equiv L_n^{(g-1/2)}(\eta)$，J ではヤコビ多項式 $P_n(\eta; g, h) \equiv P_n^{(g-1/2, h-1/2)}(\eta)$ である．多添え字多項式 $P_{\mathcal{D},n}(\eta)$ は，η の $\ell + n$ 次式，分母多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)$ は η の ℓ 次式である．ここで，ℓ は

$$\ell \stackrel{\rm def}{=} \sum_{j=1}^{M} d_j^{\rm I} + \sum_{j=1}^{N} d_j^{\rm II} - \frac{1}{2}M(M-1) - \frac{1}{2}N(N-1) + MN \geq 1,$$

である．ラベル n は $\phi_{\mathcal{D},n}$ のエネルギー固有値 $\mathcal{E}(n; \boldsymbol{\lambda})$ を指定し，また振動定理（1.1 節）により，内部の節（零点）の数を示す．多添え字多項式系 $\{P_{\mathcal{D},n}\}$ は，直交多項式の完全系を成し，次の直交関係を満たす:

$$\begin{aligned} &\int d\eta \, \frac{W(\eta; \boldsymbol{\lambda}^{[M,N]})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta; \boldsymbol{\lambda})^2} P_{\mathcal{D},n}(\eta; \boldsymbol{\lambda}) P_{\mathcal{D},m}(\eta; \boldsymbol{\lambda}) \\ &= h_n(\boldsymbol{\lambda})\delta_{nm} \times \begin{cases} \prod_{j=1}^{M}(n + g + d_j^{\rm I} + \frac{1}{2}) \cdot \prod_{j=1}^{N}(n + g - d_j^{\rm II} - \frac{1}{2}) & : {\rm L} \\ 4^{-M-N} \prod_{j=1}^{M}(n + g + d_j^{\rm I} + \frac{1}{2})(n + h - d_j^{\rm I} - \frac{1}{2}) & \\ \qquad \times \prod_{j=1}^{N}(n + g - d_j^{\rm II} - \frac{1}{2})(n + h + d_j^{\rm II} + \frac{1}{2}) & : {\rm J} \end{cases}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

ここで，元々の直交多項式の重み関数 $W(\eta; \boldsymbol{\lambda})d\eta = \phi_0(x; \boldsymbol{\lambda})^2 dx$ の具体形は

$$W(\eta; \boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\rm def}{=} \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\eta}\eta^{g-\frac{1}{2}} & : {\rm L} \\ \frac{1}{2^{g+h+1}}(1-\eta)^{g-\frac{1}{2}}(1+\eta)^{h-\frac{1}{2}} & : {\rm J} \end{cases}, \tag{4.20}$$

である．(4.19) の右辺の因子は，元の固有値と仮想状態解のエネルギーとの差の積 $\prod_{j=1}^{M}(\mathcal{E}(n) - \tilde{\mathcal{E}}_{d_j^{\rm I}}^{\rm I}) \cdot \prod_{j=1}^{N}(\mathcal{E}(n) - \tilde{\mathcal{E}}_{d_j^{\rm II}}^{\rm II})$ に起因する．クラムの定理およびその拡張の時のノルム公式 (1.26), (1.44) 参照.

固有関数の形 (4.13)–(4.14)

$$\phi_n^{[M,N]}(x) \propto \phi_0(x; \boldsymbol{\lambda}^{[M,N]}) \frac{P_{\mathcal{D},n}(\eta(x); \boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta(x); \boldsymbol{\lambda})}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

は，非常に示唆に富む．これら $\left\{\frac{P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}\right\}$ を，重み関数 $W(\eta; \boldsymbol{\lambda}^{[M,N]})$ (4.20) を持つ**直交有理関数の完全系**と解釈することができる．最低次の要素 $\frac{P_{\mathcal{D},0}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})} \propto \frac{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}$ は「ほとんど定数」((4.21)) である．n 番目の要素 $\frac{P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}$ は，直交区間（L では $0 < \eta < \infty$，J では $-1 < \eta < 1$）の中に n 個の零点を持ち，$\ell + n$ 次の多項式 $P_{\mathcal{D},n}(\eta)$ を，ℓ 次の多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)$ で割っ

たものになっている．多添え字多項式系 $\{P_{\mathcal{D},n}\}$ は ℓ 次から始まるが，次数 $0,1,\ldots,$ を持つ元々の多項式系の振る舞いは，有理関数系 $\{\frac{P_{\mathcal{D},n}(\eta)}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)}\}$ で良く表されている．このように考えると固有関数系 $\{\phi_n^{[M,N]}(x)\}$ の完全性はより自然に理解できるだろう．

これらの新しい直交有理関数達には，今までにラゲール多項式やヤコビ多項式等が重要な役割を果たしてきた分野で，同じように数多くの応用される機会があるだろう．言い換えると，直交有理関数系 $\{\frac{P_{\mathcal{D},n}(\eta)}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta)}\}$ は，多添え字 $\mathcal{D}$ の選び方に応じて，元々の直交多項式系 $\{P_n(\eta)\}$ の「良い変形」になっている．

4.2.1 変形されたハミルトニアン

新しい多添え字直交多項式系 $\{P_{\mathcal{D},n}\}$ の種々の性質を調べよう．最低次の多項式 $P_{\mathcal{D},0}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ は，パラメタのずらし（$\boldsymbol{\lambda}\to\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}$，L では $\boldsymbol{\delta}=1$，J では $\boldsymbol{\delta}=(1,1)$）で分母多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ とつながっている:

$$
\begin{aligned}
&P_{\mathcal{D},0}(\eta;\boldsymbol{\lambda})\\
&=\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\times\begin{cases}(-1)^M\prod_{j=1}^N(g-d_j^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2}) & :\mathrm{L}\\ 2^{-M}\prod_{j=1}^M(h-d_j^{\mathrm{I}}-\frac{1}{2}) & \\ \quad\times(-2)^{-N}\prod_{j=1}^N(g-d_j^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2}) & :\mathrm{J}\end{cases}.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

$[M,N]$ の仮想状態を削除した系のハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\equiv\mathcal{H}^{[M,N]}$ は，(4.21) を用いて，基底状態波動関数 $\phi_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})\equiv\phi_0^{[M,N]}(x;\boldsymbol{\lambda})$ で表すことができる:

$$
\mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}),\tag{4.22}
$$

$$
\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{d}{dx}-\frac{\partial_x\phi_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})}{\phi_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})},
$$

$$
\phi_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})\propto\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M,N]})\frac{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})}.\tag{4.23}
$$

新しいハミルトニアンは，構成法[39], [41]から，形状不変である[35], [38]:

$$
\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger=\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^\dagger\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})+\mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}).
$$

演算子達 $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ が，隣接する次数とパラメタを持つ固有関数達を関係付ける:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})&=f_n(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\mathcal{D},n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}),\\
\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\phi_{\mathcal{D},n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})&=b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}).
\end{aligned}
$$

ここで，定数 $f_n(\boldsymbol{\lambda})$ と $b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})$ は，固有値 $f_n(\boldsymbol{\lambda})b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})$ の因子である（(2.11)）．多項式系 $\{P_{\mathcal{D},n}\}$ に作用する前方ずらし演算子の定義は

$$
\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^{-1}\circ\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\circ\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})
$$

$$= c_{\mathcal{F}} \frac{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta; \boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta; \boldsymbol{\lambda})} \Big(\frac{d}{d\eta} - \frac{\partial_\eta \Xi_{\mathcal{D}}(\eta; \boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta; \boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})} \Big),$$

である．ここで，$\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ は，$\phi_{\mathcal{D},n}$ の因子である，(4.13)–(4.14)．同様に多項式系 $\{P_{\mathcal{D},n}\}$ に作用する後方ずらし演算子の定義は

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^{\dagger} \circ \psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) \\
&= -4 c_{\mathcal{F}}^{-1} c_2(\eta) \frac{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})} \\
&\qquad \times \Big(\frac{d}{d\eta} + \frac{c_1(\eta, \boldsymbol{\lambda}^{[M,N]})}{c_2(\eta)} - \frac{\partial_\eta \Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})} \Big),
\end{aligned}$$

であり，関数 $c_1(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ と $c_2(\eta)$ は (2.17), (2.18) で与えてある．これらの，多添え字多項式 $P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ への作用は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}) &= f_n(\boldsymbol{\lambda}) P_{\mathcal{D},n-1}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}), \\
\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) P_{\mathcal{D},n-1}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) &= b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda}) P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}$$

となる．

4.2.2 新直交多項式の満たす 2 階微分方程式

多添え字多項式を規定する 2 階の微分演算子 $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})$ は

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ \mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) \circ \psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) \\
&= -4 \bigg(c_2(\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} + \Big(c_1(\eta, \boldsymbol{\lambda}^{[M,N]}) - 2 c_2(\eta) \frac{\partial_\eta \Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})} \Big) \frac{d}{d\eta} \\
&\quad + c_2(\eta) \frac{\partial_\eta^2 \Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})} - c_1(\eta, \boldsymbol{\lambda}^{[M,N]} - \boldsymbol{\delta}) \frac{\partial_\eta \Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})} \bigg), \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}). \qquad (4.25)$$

一般的なパラメタに対しては分母多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ の零点は単純なので，上の 2 階微分方程式 (4.25) は，J の場合フックス型になる．$\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ の零点での特性指数はどこでも等しく，0 と 3 である．J の場合の多添え字多項式系 $\{P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})\}$ は，フックス型微分方程式 (4.25) の大域解で，$3+\ell$ 個の確定特異点を持つ[42]．L の場合は，一つの端点を無限遠に飛ばした合流型になる．この状況は，例外直交多項式の場合と基本的に同じである．ℓ 個の余分な特異点は，すべて「見かけの」(apparent) 特異点である．

削除する準位の集合 $\mathcal{D}$ の特殊な場合に，パラメタを微調整することによって，分母多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ が高次の零点を持つようにすることができる．$\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ が 2 重零点を持つ L の具体例を 4.3.1.5 節で，J の具体例を 4.3.2.4 節で述べる．更に多くの具体例が [43]～[45] に報告されている．これらは，「見かけの特異点の合流」と見なすことができる．3 次以上の零点を持つ分母多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ を具体的に作れるかどうかは面白い問題である．

削除する準位については，$d_j^{\mathrm{I,II}} \geq 1$ の制限を付けたが，準位ゼロ $d_j^{\mathrm{I,II}} = 0$ のものを削除できないわけではない．多添え字多項式系 (4.15) で，準位ゼロのものを削除すると，それは，一つ削除数の少ない別のもの $\mathcal{D}'$ を削除したものと同値になる:

$$
\begin{aligned}
P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})\Big|_{d_M^{\mathrm{I}}=0} &= P_{\mathcal{D}',n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I}}) \times A,\\
\mathcal{D}' &= \{d_1^{\mathrm{I}}-1,\ldots,d_{M-1}^{\mathrm{I}}-1,d_1^{\mathrm{II}}+1,\ldots,d_N^{\mathrm{II}}+1\}, \qquad (4.26)\\
P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})\Big|_{d_N^{\mathrm{II}}=0} &= P_{\mathcal{D}',n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{II}}) \times B,\\
\mathcal{D}' &= \{d_1^{\mathrm{I}}+1,\ldots,d_M^{\mathrm{I}}+1,d_1^{\mathrm{II}}-1,\ldots,d_{N-1}^{\mathrm{II}}-1\}. \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

ここで，定数 A と B は

$$
A = \begin{cases}
(-1)^M \prod_{j=1}^{N}(d_j^{\mathrm{II}}+1) & : \mathrm{L}\\
-(-2)^{-M}\prod_{j=1}^{M-1}(g-h+d_j^{\mathrm{I}}+1) & \\
\quad\times(-2)^{-N}\prod_{j=1}^{N}(d_j^{\mathrm{II}}+1)\cdot(n+h-\tfrac{1}{2}) & : \mathrm{J}
\end{cases},
$$

$$
B = \begin{cases}
(-1)^M \prod_{j=1}^{M}(d_j^{\mathrm{I}}+1)\cdot(n+g-\tfrac{1}{2}) & : \mathrm{L}\\
2^{-M}\prod_{j=1}^{M}(d_j^{\mathrm{I}}+1)\cdot(-2)^{-N}(n+g-\tfrac{1}{2}) & \\
\quad\times\prod_{j=1}^{N-1}(h-g+d_j^{\mathrm{II}}+1) & : \mathrm{J}
\end{cases}.
$$

分母多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}$ も，(4.21) から同様に振る舞う．つまり，準位ゼロのものを削除すると $M+N-1$ 個の仮想準位を削除したことになる．これが，$d_j^{\mathrm{I,II}} \geq 1$ の制限を付けた理由である．

ここで得られた関係式 (4.26)–(4.27) は，ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ の種々の同値類を調べるのに役に立つ．

初期に発表されたI型II型の例外 X_ℓ 直交多項式[35], [37], [42]は，最も簡単な1個の仮想状態削除 $\mathcal{D}=\{\ell^{\mathrm{I}}\}$ あるいは $\{\ell^{\mathrm{II}}\}$, $\ell \geq 1$ で得られる:

$$
\xi_\ell(\eta;\boldsymbol{\lambda}) = \Xi_{\mathcal{D}}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta}-\tilde{\boldsymbol{\delta}}), \quad P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}) = P_{\mathcal{D},n}(\eta;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta}-\tilde{\boldsymbol{\delta}}) \times A, \qquad (4.28)
$$

ここで, $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I,II}}$ で, 乗法定数 A は $X^{\mathrm{I}}L$ では $A=-1$, $X^{\mathrm{II}}L$ では $(n+g+\frac{1}{2})^{-1}$, $X^{\mathrm{I}}J$ では $2(n+h+\frac{1}{2})^{-1}$，$X^{\mathrm{II}}J$ では $-2(n+g+\frac{1}{2})^{-1}$ である．上の (4.22) から (4.25) までの公式の大部分は，例外直交多項式の場合も同じ形である．

4.3 具体形：新直交多項式

ここで，新しい直交多項式のいくつかの具体形を示そう．それらは，ラゲール多項式およびヤコビ多項式の変形である．

4.3.1 多添え字ラゲール多項式

4.3.1.1 X_1 ラゲール多項式

次の I 型および II 型の 1 次の仮想状態波動関数 ($\eta = x^2$) を使おう:

$$\tilde{\phi}_1^{\mathrm{I}}(x) = e^{x^2/2}x^g\xi_1^{\mathrm{I}}(\eta;g), \qquad \xi_1^{\mathrm{I}}(\eta;g) = \eta + g + \tfrac{1}{2}, \tag{4.29}$$

$$\tilde{\phi}_1^{\mathrm{II}}(x) = e^{-x^2/2}x^{1-g}\xi_1^{\mathrm{II}}(\eta;g), \quad \xi_1^{\mathrm{II}}(\eta;g) = -\eta - g + \tfrac{3}{2}. \tag{4.30}$$

これらは, $g > 3/2$ で $0 < x < \infty$ に零点を持たない. 対応するポテンシャルは

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{I}}(x;g) &= x^2 + \frac{g(g+1)}{x^2} - \frac{16(1+2g)}{(2x^2+2g+1)^2} + \frac{8}{2x^2+2g+1} \\ &\quad - (3+2g), \\ U^{\mathrm{II}}(x;g) &= x^2 + \frac{(g-2)(g-1)}{x^2} - \frac{16(-3+2g)}{(2x^2+2g-3)^2} + \frac{8}{2x^2+2g-3} \\ &\quad + 1 - 2g. \end{aligned}$$

この 2 つのポテンシャルが同じ形なことは明らかである:

$$U^{\mathrm{I}}(x;g) = U^{\mathrm{II}}(x;g+2).$$

I 型の固有関数のみを書くと

$$\phi_{1,n}^{\mathrm{I}}(x) = 2\psi_1(x;g)P_{1,n}(\eta;g), \quad \psi_1(x;g) = \frac{e^{-x^2/2}x^{1+g}}{\xi_1^{\mathrm{I}}(\eta;g)}, \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} P_{1,n}(\eta;g) &= -(\partial_\eta\xi_1^{\mathrm{I}}(\eta;g) + \xi_1^{\mathrm{I}}(\eta;g))L_n^{(g-1/2)}(\eta) \\ &\quad + \xi_1^{\mathrm{I}}(\eta;g)\partial_\eta L_n^{(g-1/2)}(\eta), \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} P_{1,0}(\eta;g) &= -(\eta + g + 3/2) = -\xi_1^{\mathrm{I}}(\eta;g+1), \\ P_{1,1}(\eta;g) &= (4\eta^2 - 4g(g+3) - 5)/4, \\ P_{1,2}(\eta;g) &= -\big(8\eta^3 - 4(2g+7)\eta^2 - 2(2g+1)(2g+7)\eta \\ &\qquad + (2g+1)(2g+3)(2g+7)\big)/16, \ldots. \end{aligned}$$

$\phi_{1,n}^{\mathrm{I}}(x)$ (4.31) が, ポテンシャル $U^{\mathrm{I}}(x;g)$ のシュレーディンガー方程式, $\mathcal{E}(n) = 4n$, を満たすことの検算はたやすい.

4.3.1.2 X_2 ラゲール多項式

仮想状態波動関数 ($\eta = x^2$) は

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2^{\mathrm{I}}(x) &= e^{x^2/2}x^g\xi_2^{\mathrm{I}}(\eta;g), \\ \xi_2^{\mathrm{I}}(\eta;g) &= \big(4\eta^2 + 4(2g+3)\eta + (2g+1)(2g+3)\big)/8, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2^{\mathrm{II}}(x) &= e^{-x^2/2}x^{1-g}\xi_2^{\mathrm{II}}(\eta;g), \\ \xi_2^{\mathrm{II}}(\eta;g) &= \big(4\eta^2 + 4(2g-5)\eta + (2g-3)(2g-5)\big)/8. \end{aligned} \tag{4.34}$$

これらは $g>5/2$ で，$0<x<\infty$ に零点を持たない．対応するポテンシャルは

$$U^{\mathrm{I}}(x;g)=x^2+\frac{g(g+1)}{x^2}+\frac{4\eta(2g+3)}{\xi_2^{\mathrm{I}}(\eta;g)^2}+\frac{2(2\eta-2g-3)}{\xi_2^{\mathrm{I}}(\eta;g)},$$
$$-(3+2g),$$
$$U^{\mathrm{II}}(x;g)=x^2+\frac{(g-2)(g-1)}{x^2}-\frac{4\eta(2g-5)}{\xi_2^{\mathrm{II}}(\eta;g)^2}+\frac{2(2\eta-2g+5)}{\xi_2^{\mathrm{II}}(\eta;g)}$$
$$+1-2g.$$

I 型の固有関数は

$$\phi_{2,n}^{\mathrm{I}}(x)=2\psi_2^{\mathrm{I}}(x;g)P_{2,n}^{\mathrm{I}}(\eta;g),\quad \psi_2^{\mathrm{I}}(x;g)=\frac{e^{-x^2/2}x^{1+g}}{\xi_2^{\mathrm{I}}(\eta;g)},$$
$$P_{2,n}^{\mathrm{I}}(\eta;g)=-(\partial_\eta\xi_2^{\mathrm{I}}(\eta;g)+\xi_2^{\mathrm{I}}(\eta;g))L_n^{(g-1/2)}(\eta)$$
$$+\xi_2^{\mathrm{I}}(\eta;g)\partial_\eta L_n^{(g-1/2)}(\eta),$$
$$P_{2,0}^{\mathrm{I}}(\eta;g)=-\xi_2^{\mathrm{I}}(\eta;g+1)$$
$$=-\left(4\eta^2+4(2g+5)\eta+(2g+3)(2g+5)\right)/8,$$
$$P_{2,1}^{\mathrm{I}}(\eta;g)=\left(8\eta^3+4(2g+7)\eta^2-2(2g+1)(2g+7)\eta\right.$$
$$\left.-(2g+1)(2g+3)(2g+7)\right)/16,$$
$$P_{2,2}^{\mathrm{I}}(\eta;g)=\left(-16\eta^4+2(2g+3)(2g+9)\eta^2\right.$$
$$\left.-(2g+1)(2g+3)^2(2g+9)\right)/64,\ldots.$$

II 型の固有関数は

$$\phi_{2,n}^{\mathrm{II}}(x)=2\psi_2^{\mathrm{II}}(x;g)P_{2,n}^{\mathrm{II}}(\eta;g),\quad \psi_2^{\mathrm{II}}(x;g)=\frac{e^{-x^2/2}x^{g-1}}{\xi_2^{\mathrm{II}}(\eta;g)},$$
$$P_{2,n}^{\mathrm{I}}(\eta;g)=(-\eta\partial_\eta\xi_2^{\mathrm{II}}(\eta;g)+(g-1/2)\xi_2^{\mathrm{II}}(\eta;g))L_n^{(g-1/2)}(\eta)$$
$$+\eta\xi_2^{\mathrm{II}}(\eta;g)\partial_\eta L_n^{(g-1/2)}(\eta),$$
$$P_{2,0}^{\mathrm{II}}(\eta;g)=-(2g-5)\xi_2^{\mathrm{II}}(\eta;g+1)$$
$$=-(2g-5)\left(4\eta^2+4(2g-3)\eta+(2g-1)(2g-3)\right)/8,$$
$$P_{2,1}^{\mathrm{I}}(\eta;g)=(2g-3)/16\times\left(-8\eta^3-4(2g-5)\eta^2+2(2g+1)(2g-5)\eta\right.$$
$$\left.+(2g+1)(2g-1)(2g-5)\right),$$
$$P_{2,2}^{\mathrm{I}}(\eta;g)=(2g-1)/64\times\left(16\eta^4-64\eta^3-8(2g+3)(2g-5)\eta^2\right.$$
$$\left.+(2g+3)(2g+1)(2g-3)(2g-5)\right),\ldots.$$

4.3.1.3 X_ℓ ラゲール多項式

一般の ℓ の X_ℓ^{I} ラゲール多項式の表式は $(\eta=x^2)$,

$$\phi^{\mathrm{I}}_{\ell,n}(x) = 2\psi^{\mathrm{I}}_{\ell}(x;g)P^{\mathrm{I}}_{\ell,n}(\eta;g), \quad \psi^{\mathrm{I}}_{\ell}(x;g) = \frac{e^{-x^2/2}x^{g+1}}{\xi^{\mathrm{I}}_{\ell}(\eta;g)},$$
$$P^{\mathrm{I}}_{\ell,n}(\eta;g) = -\left(\partial_\eta \xi^{\mathrm{I}}_{\ell}(\eta;g) + \xi^{\mathrm{I}}_{\ell}(\eta;g)\right) L^{(g-1/2)}_n(\eta) + \xi^{\mathrm{I}}_{\ell}(\eta;g)\partial_\eta L^{(g-1/2)}_n(\eta).$$

ポテンシャルは

$$U^{\mathrm{I}}_{\ell}(x) = x^2 + \frac{g(g+1)}{x^2} - (3+2g) - 2\partial_x^2 \log \xi^{\mathrm{I}}_{\ell}(\eta;g).$$

一般の ℓ の X^{II}_{ℓ} ラゲール多項式の表式は

$$\phi^{\mathrm{II}}_{\ell,n}(x) = 2\psi^{\mathrm{II}}_{\ell}(x;g)P^{\mathrm{II}}_{\ell,n}(\eta;g), \quad \psi^{\mathrm{II}}_{\ell}(x;g) = \frac{e^{-x^2/2}x^{g-1}}{\xi^{\mathrm{II}}_{\ell}(\eta;g)},$$
$$P^{\mathrm{II}}_{\ell,n}(\eta;g) = \left(-\eta\partial_\eta \xi^{\mathrm{II}}_{\ell}(\eta;g) + (g-1/2)\xi^{\mathrm{II}}_{\ell}(\eta;g)\right) L^{(g-1/2)}_n(\eta) + \eta\xi^{\mathrm{II}}_{\ell}(\eta;g)\partial_\eta L^{(g-1/2)}_n(\eta).$$

ポテンシャルは

$$U^{\mathrm{II}}_{\ell}(x) = x^2 + \frac{(g-1)(g-2)}{x^2} + (1-2g) - 2\partial_x^2 \log \xi^{\mathrm{II}}_{\ell}(\eta;g).$$

4.3.1.4 $\mathcal{D} = \{1,2\}$ 多添え字ラゲール多項式

I 型 $\{\tilde{\phi}^{\mathrm{I}}_1(x), \tilde{\phi}^{\mathrm{I}}_2(x)\}$ (4.29), (4.33) および II 型 $\{\tilde{\phi}^{\mathrm{II}}_1(x), \tilde{\phi}^{\mathrm{II}}_2(x)\}$ (4.30), (4.34) の仮想状態波動関数を削除する．これらのロンスキアンは $(\eta = x^2)$,

$$\mathrm{W}[\tilde{\phi}^{\mathrm{I}}_1, \tilde{\phi}^{\mathrm{I}}_2](x) = 2e^{x^2}x^{2g+1}\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g),$$
$$\mathrm{W}[\tilde{\phi}^{\mathrm{II}}_1, \tilde{\phi}^{\mathrm{II}}_2](x) = 2e^{-x^2}x^{-2g+3}\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g),$$
$$\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{W}[\xi^{\mathrm{I}}_1, \xi^{\mathrm{I}}_2](\eta) = \left(4\eta^2 + 4(2g+1)\eta + (2g+1)(2g+3)\right)/8,$$
$$\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{W}[\xi^{\mathrm{II}}_1, \xi^{\mathrm{II}}_2](\eta) = -\left(4\eta^2 + 4(2g-3)\eta + (2g-3)(2g-5)\right)/8.$$

$$U^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(x;g) = x^2 + \frac{(g+1)(g+2)}{x^2} + 8\frac{\eta\left(\partial_\eta \Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g)\right)^2}{\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g)^2} - 4\frac{(\partial_\eta \Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g) + 2\eta\partial_\eta^2 \Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g))}{\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g)} - (5+2g),$$

$$U^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(x;g) = x^2 + \frac{(g-2)(g-3)}{x^2} + 8\frac{\eta\left(\partial_\eta \Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g)\right)^2}{\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g)^2} - 4\frac{(\partial_\eta \Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g) + 2\eta\partial_\eta^2 \Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g))}{\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g)} + 3 - 2g.$$

I 型の固有関数は

$$
\begin{aligned}
\phi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},n}(x) &= 4\psi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(x;g)P^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},n}(\eta;g),\\
\psi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(x;g) &= \frac{e^{-x^2/2}x^{g+2}}{\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g)},\\
P^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},0}(\eta;g) &= \Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g+1)\\
&= \left(4\eta^2+4(2g+3)\eta+(2g+3)(2g+5)\right)/8,\\
P^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},1}(\eta;g) &= \left(-8\eta^3-4(2g+1)\eta^2+2(2g+1)(2g+7)\eta\right.\\
&\quad \left.+(2g+1)(2g+5)(2g+7)\right)/16,\\
P^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},2}(\eta;g) &= \left(16\eta^4-64\eta^3-8(2g+1)(2g+9)\eta^2\right.\\
&\quad \left.+(2g+1)(2g+3)(2g+7)(2g+9)\right)/64,\ldots.
\end{aligned}
$$

II 型の固有関数は

$$
\begin{aligned}
\phi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\},n}(x) &= 4\psi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(x;g)P^{\mathrm{II}}_{\{1,2\},n}(\eta;g),\\
\psi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(x;g) &= \frac{e^{-x^2/2}x^{g-2}}{\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g)},\\
P^{\mathrm{II}}_{\{1,2\},0}(\eta;g) &= \tfrac{1}{4}(2g-1)(2g-3)\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g+1)\\
&= -2^{-5}(2g-3)(2g-5)\left(4\eta^2+4(2g-1)\eta+(2g-1)(2g-3)\right),\\
P^{\mathrm{II}}_{\{1,2\},1}(\eta;g) &= -2^{-6}(2g-1)(2g-3)\times\left(-8\eta^3-4(2g+1)\eta^2\right.\\
&\quad \left.+2(2g+1)(2g-5)\eta+(2g+1)(2g-3)(2g-5)\right),\\
P^{\mathrm{II}}_{\{1,2\},2}(\eta;g) &= -2^{-8}(2g+1)(2g-1)\times\left(16\eta^4-8(2g+3)(2g-3)\eta^2\right.\\
&\quad \left.+(2g+3)(2g-3)^2(2g-5)\right),\ldots.
\end{aligned}
$$

4.3.1.5　特別の場合 $\mathcal{D}=\{2^{\mathrm{I}},1^{\mathrm{II}}\}$ 多添え字ラゲール多項式，$g=15/2$

多添え字ラゲール多項式で，$\mathcal{D}$ およびパラメタを特別な値に微調整することによって，興味深い例が作れる．$\mathcal{D}=\{2^{\mathrm{I}},1^{\mathrm{II}}\}$ で，$g=15/2$ に取ると，ロンスキアンが 3 重根を持つ[44]:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}[\tilde{\phi}^{\mathrm{I}}_2(x),\tilde{\phi}^{\mathrm{II}}_1(x)](x) = (\eta+6)^3(\eta+14),\qquad \eta\stackrel{\text{def}}{=}x^2,\\
&U_{\mathcal{D}}(x) = x^2+\frac{195}{4x^2}-\frac{144}{(\eta+6)^2}+\frac{12}{\eta+6}-\frac{112}{(\eta+14)^2}+\frac{4}{\eta+14}-16.
\end{aligned}
$$

対応するシュレーディンガー方程式とその解は

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}\phi_{\mathcal{D};n}(x) = \mathcal{E}(n)\phi_{\mathcal{D};n}(x), \tag{4.35}$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d^2}{dx^2}+U_{\mathcal{D}}(x),\quad \mathcal{E}(n)=4n, \tag{4.36}$$

$$\phi_{\mathcal{D};n}(x) = \frac{e^{-\eta/2}\eta^{\frac{15}{4}}}{(\eta+6)^2(\eta+14)}\mathcal{L}_{\mathcal{D};n}(\eta), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.37}$$

ここで $\mathcal{L}_{\mathcal{D};n}(\eta)$ は η の $n+3$ 次の多項式である:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{D};n}(\eta) &\stackrel{\text{def}}{=} -24(840 + 280\eta + 30\eta^2 + \eta^3)L_n^{(7)}(\eta)\\ &\quad - 4n(\eta+6)^2(\eta+14)L_n^{(7)}(\eta) - 16\eta(\eta+6)(\eta+12)\partial_\eta L_n^{(7)}(\eta).\end{aligned}$$

いくつかの具体形は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{D};0}(\eta) &= -24(840 + 280\eta + 30\eta^2 + \eta^3),\\ \mathcal{L}_{\mathcal{D};1}(\eta) &= 28(-6336 - 1320\eta + 44\eta^2 + 22\eta^3 + \eta^4),\\ \mathcal{L}_{\mathcal{D};2}(\eta) &= -16(54432 + 4536\eta - 1944\eta^2 - 180\eta^3 + 12\eta^4 + \eta^5),\\ \mathcal{L}_{\mathcal{D};3}(\eta) &= 6(-524160 + 21840\eta + 26520\eta^2 - 156\eta^3 - 338\eta^4 + \eta^6), \ldots.\end{aligned}$$

直交関係は

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}\eta^7}{(\eta+6)^4(\eta+14)^2}\mathcal{L}_{\mathcal{D};n}(\eta)\mathcal{L}_{\mathcal{D};m}(\eta)d\eta = h_{\mathcal{D};n}\delta_{n\,m}, \tag{4.38}$$

$$h_{\mathcal{D};n} \stackrel{\text{def}}{=} 16(n+10)(n+6)(n+1)_7, \quad n, m = 0, 1, \ldots, \tag{4.39}$$

ここで，$(a)_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^n (a+k-1)$, (A.1). $n = 0, 1, 2, 3$ について，シュレーディンガー方程式 (4.35) と直交関係 (4.38) の検算を練習問題としよう．

4.3.2 多添え字ヤコビ多項式

4.3.2.1 X_1 ヤコビ多項式

使うのは次の仮想状態波動関数 ($\eta = \cos 2x$, $-1 < \eta < 1$):

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_1^{\mathrm{I}}(x) &= (\sin x)^g(\cos x)^{1-h}\xi_1^{\mathrm{I}}(\eta; g, h),\\ \xi_1^{\mathrm{I}}(\eta; g, h) &= ((2+g-h)\eta + g + h - 1)/2,\\ \tilde{\phi}_1^{\mathrm{II}}(x) &= (\sin x)^{1-g}(\cos x)^h\xi_1^{\mathrm{II}}(\eta; g, h),\\ \xi_1^{\mathrm{II}}(\eta; g, h) &= ((2-g+h)\eta - g - h + 1)/2.\end{aligned}$$

これらは，$g, h > 2$ で，区間内 $-1 \le \eta \le 1$ に零点無しで，非特異なポテンシャルを作る:

$$\begin{aligned}U^{\mathrm{I}}(x; g, h) &= \frac{g(g+1)}{\sin^2 x} + \frac{(h-1)(h-2)}{\cos^2 x} - (g+h)^2\\ &\quad - \frac{8(2g+1)(2h-3)}{((2+g-h)\eta + g + h - 1)^2} + \frac{8(g+h-1)}{(2+g-h)\eta + g + h - 1},\\ U^{\mathrm{II}}(x; g, h) &= \frac{(g-1)(g-2)}{\sin^2 x} + \frac{h(h+1)}{\cos^2 x} - (g+h)^2\end{aligned}$$

$$-\frac{8(2g-3)(2h+1)}{((2-g+h)\eta-g-h+1)^2}-\frac{8(g+h-1)}{(2-g+h)\eta-g-h+1}.$$

この 2 つのポテンシャルは，明らかに同じ形である:

$$U^{\mathrm{I}}(x;g,h)=U^{\mathrm{II}}(x;g+2,h-2).$$

I 型の固有関数のみを記そう $(P_n(\eta)\stackrel{\text{def}}{=}P_n^{(g-1/2,h-1/2)}(\eta))$:

$$\begin{aligned}
\phi^{\mathrm{I}}_{1,n}(x)&=-4\psi_1(x;g,h)P_{1,n}(\eta;g,h),\\
\psi_1(x;g,h)&=\frac{(\sin x)^{g+1}(\cos x)^{h-1}}{\xi^{\mathrm{I}}_1(\eta;g,h)},\\
P_{1,n}(\eta;g,h)&=-\tfrac{1}{4}\left(2(1+\eta)\partial_\eta\xi^{\mathrm{I}}_1(\eta;g,h)+(1-2h)\xi^{\mathrm{I}}_1(\eta;g,h)\right)P_n(\eta)\\
&\quad+\frac{1}{2}(1+\eta)\xi^{\mathrm{I}}_1(\eta;g,h)\partial_\eta P_n(\eta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1,0}(\eta;g,h)&=(2h-3)\left(1+g+h+(2+g-h)\eta\right)/8\\
&=(2h-3)/2\times\xi^{\mathrm{I}}_1(\eta;g+1,h+1),\\
P_{1,1}(\eta;g,h)&=(2h-1)/16\times\big((2+g-h)(1+g+h)\eta^2\\
&\quad+(2h^2-2h+2g^2+6g+1)\eta+(2+g-h)(1+g+h)\big),\\
P_{1,2}(\eta;g,h)&=(2h+1)/64\times\big((2+g-h)(2+g+h)(3+g+h)\eta^3\\
&\quad+(2+g+h)(3+12g+3g^2-4h-2gh+3h^2)\eta^2\\
&\quad+(2+g-h)(-3+9g+3g^2+h+2gh+3h^2)\eta\\
&\quad+9+4g+4g^2+g^3-4h-4gh-g^2h-4h^2-gh^2+h^3\big),\ldots.
\end{aligned}$$

4.3.2.2 X_ℓ ヤコビ多項式

次の仮想状態波動関数 $(\eta=\cos 2x)$ を用いた 1 回のダルブー変換で得られる:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}^{\mathrm{I}}_\ell(x)&=(\sin x)^g(\cos x)^{1-h}\xi^{\mathrm{I}}_\ell(\eta;g,h),\\
\xi^{\mathrm{I}}_\ell(\eta;g,h)&=P_\ell^{(g-1/2,1/2-h)}(\eta),
\end{aligned}\tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}^{\mathrm{II}}_\ell(x)&=(\sin x)^{1-g}(\cos x)^{h}\xi^{\mathrm{II}}_\ell(\eta;g,h),\\
\xi^{\mathrm{II}}_\ell(\eta;g,h)&=P_\ell^{(1/2-g,h-1/2)}(\eta).
\end{aligned}\tag{4.41}$$

ヤコビ多項式の鏡映変換性

$$P_\ell^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^\ell P_\ell^{(\beta,\alpha)}(x),\tag{4.42}$$

から，I 型と II 型の仮想状態波動関数に関係がある:

$$\xi^{\mathrm{II}}_\ell(-\eta;g,h)=(-1)^\ell P_\ell^{(h-1/2,1/2-g)}(\eta)=(-1)^\ell\xi^{\mathrm{I}}_\ell(\eta;h,g).$$

I 型の X_ℓ^{I} ヤコビ多項式は $(P_n(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} P_n^{(g-1/2,h-1/2)}(\eta))$,

$$\phi_{\ell,n}^{\mathrm{I}}(x) = -4\psi_\ell^{\mathrm{I}}(x;g,h)P_{\ell,n}^{\mathrm{I}}(\eta;g,h),$$

$$\psi_\ell^{\mathrm{I}}(x;g,h) = \frac{(\sin x)^{g+1}(\cos x)^{h-1}}{\xi_\ell^{\mathrm{I}}(\eta;g,h)}, \tag{4.43}$$

$$P_{\ell,n}^{\mathrm{I}}(\eta;g,h) = -\tfrac{1}{4}\left(2(1+\eta)\partial_\eta\xi_\ell^{\mathrm{I}}(\eta;g,h) + (1-2h)\xi_\ell^{\mathrm{I}}(\eta;g,h)\right)P_n(\eta) + \tfrac{1}{2}(1+\eta)\xi_\ell^{\mathrm{I}}(\eta;g,h)\partial_\eta P_n(\eta). \tag{4.44}$$

ポテンシャルは

$$U_\ell^{\mathrm{I}}(x) = \frac{g(g+1)}{\sin^2 x} + \frac{(h-1)(h-2)}{\cos^2 x} - 2\partial_x^2 \log \xi_\ell^{\mathrm{I}}(\eta;g,h).$$

II 型の X_ℓ^{II} ヤコビ多項式は

$$\phi_{\ell,n}^{\mathrm{II}}(x) = -4\psi_\ell^{\mathrm{II}}(x;g,h)P_{\ell,n}^{\mathrm{II}}(\eta;g,h),$$

$$\psi_\ell^{\mathrm{II}}(x;g,h) = \frac{(\sin x)^{g-1}(\cos x)^{h+1}}{\xi_\ell^{\mathrm{II}}(\eta;g,h)}, \tag{4.45}$$

$$P_{\ell,n}^{\mathrm{II}}(\eta;g,h) = -\tfrac{1}{4}\left(2(1-\eta)\partial_\eta\xi_\ell^{\mathrm{II}}(\eta;g,h) + (2g-1)\xi_\ell^{\mathrm{II}}(\eta;g,h)\right)P_n(\eta) + \tfrac{1}{2}(1-\eta)\xi_\ell^{\mathrm{II}}(\eta;g,h)\partial_\eta P_n(\eta). \tag{4.46}$$

ポテンシャルは

$$U_\ell^{\mathrm{II}}(x) = \frac{(g-1)(g-2)}{\sin^2 x} + \frac{h(h+1)}{\cos^2 x} - 2\partial_x^2 \log \xi_\ell^{\mathrm{II}}(\eta;g,h).$$

これらを合わせて，I 型と II 型の間の関係 $(\ell \geq 1)$[37]が得られる:

$$\mathcal{H}^{\mathrm{I}}(x;g,h) = \mathcal{H}^{\mathrm{II}}(y;h,g), \quad y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} - x,$$

$$P_{\ell,n}^{\mathrm{II}}(-\eta;g,h) = (-1)^{\ell+n+1}P_{\ell,n}^{\mathrm{I}}(\eta;h,g).$$

4.3.2.3 $\mathcal{D} = \{1,2\}$ 多添え字ヤコビ多項式

I 型 $\{\tilde\phi_1^{\mathrm{I}}(x), \tilde\phi_2^{\mathrm{I}}(x)\}$ (4.40), (4.43) および II 型 $\{\tilde\phi_1^{\mathrm{II}}(x), \tilde\phi_2^{\mathrm{II}}(x)\}$ (4.41), (4.45) の仮想状態波動関数を削除する．これらのロンスキアンとその作るポテンシャルは $(\eta = \cos 2x)$,

$$\mathrm{W}[\tilde\phi_1^{\mathrm{I}}, \tilde\phi_2^{\mathrm{I}}](x) = -4(\sin x)^{2g+1}(\cos x)^{3-2h}\Xi_{\{1,2\}}^{\mathrm{I}}(\eta;g,h),$$

$$\mathrm{W}[\tilde\phi_1^{\mathrm{II}}, \tilde\phi_2^{\mathrm{II}}](x) = -4(\sin x)^{3-2g}(\cos x)^{2h+1}\Xi_{\{1,2\}}^{\mathrm{II}}(\eta;g,h),$$

$$\begin{aligned}\Xi_{\{1,2\}}^{\mathrm{I}}(\eta;g,h) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{W}[\xi_1^{\mathrm{I}}, \xi_2^{\mathrm{I}}](\eta)\\ &= \frac{1}{16}(g-h+4)\big(3-g-3h+2gh+h^2+g^2\\ &\quad + 2\eta(g-h+3)(g+h-1) + \eta^2(g-h+2)(g-h+3)\big),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{W}[\xi^{\mathrm{II}}_1,\xi^{\mathrm{II}}_2](\eta) = \Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(-\eta;h,g)\\
&= -\frac{1}{16}(g-h-4)\big(3-3g-h+2gh+h^2+g^2\\
&\quad +2\eta(g-h-3)(g+h-1)+\eta^2(g-h-2)(g-h-3)\big),\\
U^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(x;g,h) &= \frac{(g+2)(g+1)}{\sin^2 x}+\frac{(h-2)(h-3)}{\cos^2 x}-(g+h)^2\\
&\quad +8\frac{(1-\eta^2)\Big(\partial_\eta\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)\Big)^2}{\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)^2}\\
&\quad -8\frac{(-\eta\partial_\eta\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)+(1-\eta^2)\partial^2_\eta\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h))}{\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)},\\
U^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(x;g,h) &= \frac{(g-2)(g-3)}{\sin^2 x}+\frac{(h+2)(h+1)}{\cos^2 x}-(g+h)^2\\
&\quad +8\frac{(1-\eta^2)\Big(\partial_\eta\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)\Big)^2}{\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)^2}\\
&\quad -8\frac{(-\eta\partial_\eta\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)+(1-\eta^2)\partial^2_\eta\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h))}{\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)}.
\end{aligned}
$$

I 型の固有関数は

$$
\begin{aligned}
\phi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},n}(x) &= 16\psi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(x;g,h)P^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},n}(\eta;g,h),\\
\psi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(x;g,h) &= \frac{(\sin x)^{g+2}(\cos x)^{h-2}}{\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)},
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},0}(\eta;g,h) &= 2^{-4}(2h-3)(2h-5)\Xi^{\mathrm{I}}_{\{1,2\}}(\eta;g+1,h+1)\\
&= 2^{-8}(2h-5)(2h-3)(g-h+4)\big(3+3g+h+(g+h)^2\\
&\quad +2\eta(g-h+3)(g+h+1)+\eta^2(g-h+2)(g-h+3)\big),\\
P^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},1}(\eta;g,h) &= 2^{-9}(g-h+4)(2h-1)(2h-3)\\
&\quad\times\big((2+g-h)(3+g-h)(1+g+h)\eta^3\\
&\quad +(3+g-h)(2+3g^2+2g(5+h)+h(-2+3h))\eta^2\\
&\quad +(1+g+h)(19+3g^2+g(17-2h)+h(-13+3h))\eta,\\
&\quad +4+15g+7g^2+g^3+h+6gh+g^2h+3h^2-gh^2-h^3\big),\\
P^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},2}(\eta;g,h) &= 2^{-11}(g-h+4)(2h-1)(2h+1)\\
&\quad\times\big((2+g-h)(3+g-h)(2+g+h)(3+g+h)\eta^4\\
&\quad +2(3+g-h)(2+g+h)(3+10g+2g^2-2h+2h^2)\eta^3\\
&\quad +2(90g+93g^2+30g^3+3g^4+27h+9h^2+10gh^2+2g^2h^2-12h^3+3h^4)\eta^2\\
&\quad +2(63+75g+65g^2+20g^3+2g^4-27h-13h^2+12h^3-2h^4)\eta\\
&\quad -9+60g+37g^2+10g^3+g^4+18h+7h^2-10gh^2-2g^2h^2-8h^3+h^4\big),
\end{aligned}
$$

....

ヤコビ多項式の鏡映変換性 (4.42) から，II 型の固有関数は

$$\phi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\},n}(x)=16\psi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(x;g,h)P^{\mathrm{II}}_{\{1,2\},n}(\eta;g,h),$$
$$\psi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(x;g,h)=\frac{(\sin x)^{g-2}(\cos x)^{h+2}}{\Xi^{\mathrm{II}}_{\{1,2\}}(\eta;g,h)}, \tag{4.48}$$
$$P^{\mathrm{II}}_{\{1,2\},n}(\eta;g,h)=(-1)^nP^{\mathrm{I}}_{\{1,2\},n}(-\eta;h,g),$$

となる．

4.3.2.4 特別の場合 $\mathcal{D}=\{1^{\mathrm{I}},2^{\mathrm{II}}\}$ 多添え字ヤコビ多項式, $g=113/2, h=41/2$

多添え字ヤコビ多項式で，$\mathcal{D}$ とパラメタを特別な値に微調整することによって，興味深い例が作れる．$\mathcal{D}=\{1^{\mathrm{I}},2^{\mathrm{II}}\}$ で，$g=113/2, h=41/2$ $(\alpha=56,\beta=20)$ に取ると，ロンスキアンが 3 重根を持つ[45]:

$$\mathrm{W}[\tilde{\phi}^{\mathrm{I}}_1,\tilde{\phi}^{\mathrm{II}}_2](x)\propto(\eta+3)(\eta+2)^3,$$

$$V_{\mathcal{D}}(\eta)=\frac{113\cdot 111}{2(1-\eta)}+\frac{41\cdot 39}{2(1+\eta)}-77^2+\frac{24(2\eta+1)}{(\eta+2)^2}+\frac{8(3\eta+1)}{(\eta+3)^2}.$$

対応する多添え字ヤコビ多項式 $\{\mathcal{P}_n(\eta)\}$ の満たす方程式とその解は

$$\begin{aligned}&-(1-\eta^2)\frac{d^2\mathcal{P}_n(\eta)}{d\eta^2}+2\frac{(116+327\eta+205\eta^2+36\eta^3)}{(\eta+2)(\eta+3)}\frac{d\mathcal{P}_n(\eta)}{d\eta}\\&-\left(2\frac{(146+355\eta+111\eta^2)}{(\eta+2)(\eta+3)}+n(n+77)\right)\mathcal{P}_n(\eta)=0,\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(\eta)=&\big[9(1517+1952\eta+825\eta^2+114\eta^3)\\&+n(n+77)(2+\eta)^2(3+\eta)\big]P_n^{(56,20)}(\eta)\\&+(1-\eta^2)(2+\eta)(11+4\eta)\partial_\eta P_n^{(56,20)}(\eta).\end{aligned} \tag{4.50}$$

直交関係は

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-\eta)^{56}(1+\eta)^{20}}{(\eta+2)^4(\eta+3)^2}\mathcal{P}_n(\eta)\mathcal{P}_m(\eta)d\eta=H_n\delta_{n\,m}, \tag{4.51}$$

$$H_n\stackrel{\text{def}}{=}2^{77}\frac{(n(n+77)+1102)(n(n+77)+1242)(n+1)_{20}}{(n+57)_{20}(2n+77)}. \tag{4.52}$$

$n=0,1,2,3$ について，この特別な多添え字ヤコビ多項式 $\{\mathcal{P}_n(\eta)\}$ の方程式 (4.49) と直交関係 (4.51) の検算を練習問題としよう．

4.4 擬仮想状態と固有状態の双対性

古典的な形状不変ポテンシャルについては，擬仮想状態波動関数を用いた多

重ダルブー変換と，パラメタをずらした固有関数を用いた多重クライン・アドラー変換とが，等価になる．簡単な概念図を図 4.2 に示す．この等価性，双対性を述べるのにふさわしい記号と記法を用意しよう．前にならって，相異なる非負整数の集合を $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{d_1, d_2, \ldots, d_M\}$ $(d_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ としよう．その集合 $\mathcal{D}$ の最大値以上の整数 N を導入する:

$$N \geq \max(\mathcal{D}).$$

もう一つの相異なる非負整数の集合 $\bar{\mathcal{D}} = \{0, 1, \ldots, N\} \backslash \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_M\}$ と，ずらしたパラメタの集合 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ を次のように定義しよう:

$$\bar{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, \breve{\bar{d}}_1, \ldots, \breve{\bar{d}}_2, \ldots, \breve{\bar{d}}_M, \ldots, N\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{N+1-M}\},$$
$$\bar{d}_j \stackrel{\text{def}}{=} N - d_j, \quad \bar{\boldsymbol{\lambda}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\lambda} - (N+1)\boldsymbol{\delta}.$$

ここで，$\breve{\bar{d}}_j$ は，$\bar{d}_j$ が $\bar{\mathcal{D}}$ に含まれないことを表す．

パラメタ $\boldsymbol{\lambda}$ の形状不変な元々の系 (1.1) から出発して，$\mathcal{D}$ で指定される擬仮想状態波動関数系 $\{\tilde{\phi}_{d_j}\}$ を用いて多重ダルブー変換を行った系のハミルトニアン $\mathcal{H}^{\text{DP}}$ は

$$\mathcal{H}^{\text{DP}} = -\frac{d^2}{dx^2} + U^{\text{DP}}(x),$$
$$U^{\text{DP}}(x) = U(x; \boldsymbol{\lambda}) - 2\partial_x^2 \log\bigl|\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1}, \tilde{\phi}_{d_2}, \ldots, \tilde{\phi}_{d_M}](x; \boldsymbol{\lambda})\bigr| \qquad (4.53)$$

となる．1.5 節で述べた一般論に依れば，もしハミルトニアン $\mathcal{H}^{\text{DP}}$ が非特異であるならば，その固有関数は Φ_n^{DP} と $\breve{\Phi}_j^{\text{DP}}$ とになる:

$$\Phi_n^{\text{DP}}(x) = \frac{\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1}, \tilde{\phi}_{d_2}, \ldots, \tilde{\phi}_{d_M}, \phi_n](x; \boldsymbol{\lambda})}{\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1}, \tilde{\phi}_{d_2}, \ldots, \tilde{\phi}_{d_M}](x; \boldsymbol{\lambda})} \quad (n = 0, 1, \ldots,),$$
$$\breve{\Phi}_j^{\text{DP}}(x) = \frac{\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1}, \tilde{\phi}_{d_2}, \ldots, \breve{\tilde{\phi}}_{d_j}, \ldots, \tilde{\phi}_{d_M}](x; \boldsymbol{\lambda})}{\mathrm{W}[\tilde{\phi}_{d_1}, \tilde{\phi}_{d_2}, \ldots, \tilde{\phi}_{d_M}](x; \boldsymbol{\lambda})} \quad (j = 1, 2, \ldots, M),$$
$$\mathcal{H}^{\text{DP}} \Phi_n^{\text{DP}}(x) = \mathcal{E}(n; \boldsymbol{\lambda}) \Phi_n^{\text{DP}}(x),$$
$$\mathcal{H}^{\text{DP}} \breve{\Phi}_j^{\text{DP}}(x) = \mathcal{E}(-d_j - 1; \boldsymbol{\lambda}) \breve{\Phi}_j^{\text{DP}}(x). \qquad (4.54)$$

一方で，ずらしたパラメタ $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ を持つ系に，集合 $\bar{\mathcal{D}}$ で指定される固有状態を用いたクライン・アドラー変換を行った系は，ハミルトニアン $\mathcal{H}^{\text{KA}}$ で記述される:

$$\mathcal{H}^{\text{KA}} = -\frac{d^2}{dx^2} + U^{\text{KA}}(x),$$
$$U^{\text{KA}}(x) = U(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}})$$
$$\qquad - 2\partial_x^2 \log\bigl|\mathrm{W}[\phi_0, \phi_1, \ldots, \breve{\phi}_{\bar{d}_1}, \ldots, \breve{\phi}_{\bar{d}_M}, \ldots, \phi_N](x; \bar{\boldsymbol{\lambda}})\bigr|. \qquad (4.55)$$

当然のことながら，元々の系 (1.1) はずらしたパラメタ $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ でも，2 乗可積分な固有状態を持つものと仮定している．クライン・アドラー変換の非特異性の条

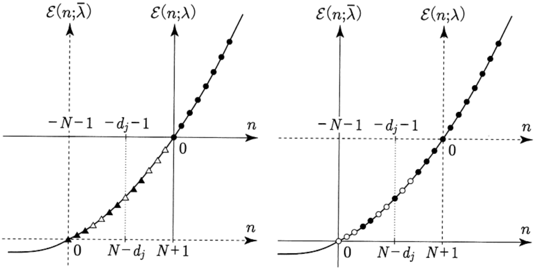


図 4.2　左側は擬仮想状態を用いた多重ダルブー変換を表す．右側は，ずらしたパラメタを持つ固有関数を用いた多重クライン・アドラー変換に対応している．黒い円は固有状態を示す．右側の白い円は，削除された固有状態を表す．左側の白い三角形は，ダルブー変換で用いられた擬仮想状態を表す．黒い三角形は，使われなかった擬仮想状態を表す．

件 (1.45) が満たされているならば，2 種類の固有状態 Φ_n^{KA} と $\breve\Phi_j^{\text{KA}}$ は以下のようになる:

$$\Phi_n^{\text{KA}}(x)=\frac{\mathrm{W}[\phi_0,\phi_1,\ldots,\breve\phi_{\bar d_1},\ldots,\breve\phi_{\bar d_M},\ldots,\phi_N,\phi_{N+1+n}](x;\bar{\boldsymbol\lambda})}{\mathrm{W}[\phi_0,\phi_1,\ldots,\breve\phi_{\bar d_1},\ldots,\breve\phi_{\bar d_M},\ldots,\phi_N](x;\bar{\boldsymbol\lambda})}$$
$$(n=0,1,\ldots,),$$
$$\breve\Phi_j^{\text{KA}}(x)=\frac{\mathrm{W}[\phi_0,\phi_1,\ldots,\breve\phi_{\bar d_1},\ldots,\phi_{\bar d_j},\ldots,\breve\phi_{\bar d_M},\ldots,\phi_N](x;\bar{\boldsymbol\lambda})}{\mathrm{W}[\phi_0,\phi_1,\ldots,\breve\phi_{\bar d_1},\ldots,\breve\phi_{\bar d_M},\ldots,\phi_N](x;\bar{\boldsymbol\lambda})}$$
$$(j=1,2,\ldots,M),$$
$$\mathcal{H}^{\text{KA}}\Phi_n^{\text{KA}}(x)=\mathcal{E}(N+1+n;\bar{\boldsymbol\lambda})\Phi_n^{\text{KA}}(x),$$
$$\mathcal{H}^{\text{KA}}\breve\Phi_j^{\text{KA}}(x)=\mathcal{E}(\bar d_j;\bar{\boldsymbol\lambda})\breve\Phi_j^{\text{KA}}(x). \tag{4.56}$$

双対性，あるいは等価性は次のように述べられる．

定理 4.1　ハミルトニアン $\mathcal{H}^{\text{DP}}$ と $\mathcal{H}^{\text{KA}}$ とを持つ 2 つの系は等価である．よりはっきり言うならば，両方のポテンシャルと固有関数の間には次のような関係がある:

$$U^{\text{DP}}(x)-\mathcal{E}(-N-1;\boldsymbol\lambda)=U^{\text{KA}}(x), \tag{4.57}$$
$$\Phi_n^{\text{DP}}(x)\propto\Phi_n^{\text{KA}}(x)\quad(n=0,1,\ldots,), \tag{4.58}$$
$$\breve\Phi_j^{\text{DP}}(x)\propto\breve\Phi_j^{\text{KA}}(x)\quad(j=1,2,\ldots,M). \tag{4.59}$$

ポテンシャルの非特異性条件は

$$\prod_{j=1}^{N+1-M}(m-e_j)\geq 0\quad(\forall m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}). \tag{4.60}$$

$M=1$, $\mathcal{D}=\{d_1\}$, $\bar{\mathcal{D}}=\{0,1,\ldots,\breve{\bar{d}}_1,\ldots,N\}$ の場合には，上の条件は偶数の d_1, $d_1\in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で満たされる．言い換えると偶数の v の擬仮想状態波動関数 $\{\tilde{\phi}_{\rm v}\}$ は節を持たない．上の比例関係 (4.57)–(4.59) は，代数的なもので，非特異性条件 (4.60) に関わらず成り立つものである．

1.6 節で導入した 3 つの基本的な完全可解ポテンシャルの他にも，2.3 節で紹介した種々の形状不変なポテンシャルに対しても，この双対性は成り立つ[46]．

証明と関連した詳細な議論は，原論文[46], [47] を参照されたい．H, L および J の時のように，固有関数系が因子化 (1.62) されている場合には，次の多項式のロンスキアンの恒等式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}[\xi_{d_1},\xi_{d_2},\ldots,\xi_{d_M}](\eta;\boldsymbol{\lambda})\\
&\qquad\propto \mathrm{W}[P_0,P_1,\ldots,\breve{P}_{\bar{d}_1},\ldots,\breve{P}_{\bar{d}_M},\ldots,P_N](\eta;\bar{\boldsymbol{\lambda}}).
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

1.7 節で論じたいくつかの例 (1.82), (1.85), (1.86), (1.89), (1.90) 等が，この双対性および多項式のロンスキアン恒等式の最も簡単なものになっている．

H, L および J について，4.1.2 節で示した色々の擬仮想状態波動関数 (4.8)–(4.10) の集合 $\mathcal{D}=\{d_1,\ldots,d_M\}$ について，この多項式のロンスキアンの恒等式 (4.61) を検算することを練習問題としよう．

第 5 章
可解な散乱問題

シュレーディンガー方程式の完全可解性は，ポテンシャルが閉じ込め型でない場合 ($\lim_{x\to-\infty} U(x) < \infty$, $\lim_{x\to+\infty} U(x) < \infty$) には，新しい側面を持ってくる．離散固有状態の他に，連続スペクトルの状態が登場する．その大部分の場合には，離散準位の数が有限個なので，対応する 2 乗可積分な直交する固有関数系が完全系を成さないことは自明であるが，クーロンポテンシャルのような例外もある．連続スペクトルは，無限遠近傍で漸近的に進行波 ($e^{\pm ikx}$) の形を取る解に対応しており，それがポテンシャルを通過することにより，一部は反射され，残りが透過する．どちらの場合にも，波の位相のずれを伴う．完全可解なポテンシャルでは，離散固有値とそれに対応する固有関数のみならず，この透過振幅 $t(k)$ および反射振幅 $r(k)$ が，波数 k の有理型関数として明示的に計算できる．この散乱振幅の計算には，固有関数を成す古典直交多項式を（合流型）超幾何関数に埋め込み，その接続公式を用いる．

5.1 散乱問題の設定

ポテンシャルが閉じ込め型でないので，それが無限遠方で消える $U(-\infty) = 0$ および $0 = U(+\infty)$*1) としよう．この場合には，漸近的に平面波 $e^{\pm ikx}$, $k \in \mathbb{R}_+$ になるシュレーディンガー方程式の解が正のエネルギー $\mathcal{E} = k^2$ を持つ．散乱問題の設定には，2 つの場合がある．全直線 $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$ の場合を (A) 群と呼ぼう，半直線 $x_1 = 0$, $x_2 = +\infty$ の場合を (B) 群と呼ぼう．図 5.1 に全直線の散乱問題の一般的状況を例示してある．(A) 群では，透過振幅 $t(k)$ および反射振幅 $r(k)$ を，そして (B) 群では反射振幅 $r(k)$ のみを，正のエネル

*1) エネルギーの基点の取り方が，基底状態を 0 とする今までのものと異なることに注意しよう．左と右の無限遠でポテンシャルの漸近値が異なる場合 $U(-\infty) \neq U(+\infty)$ は，別の取り扱いが必要になる．ローゼン・モースポテンシャルなどがこれにあたる[10], [11], [46], [48], [49]．

ギー $\mathcal{E}=k^2$ を持つ波動関数 $\psi_k(x)$ の漸近的振る舞いで定義する:

$$\mathcal{H}\psi_k(x)=k^2\psi_k(x), \qquad k\in\mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

$$\psi_k(x)\approx\begin{cases} e^{ikx} & x\to+\infty \\ A(k)e^{ikx}+B(k)e^{-ikx} & x\to-\infty \end{cases} \qquad \text{(A)}, \quad (5.2)$$

$$\psi_k(x)\approx \quad r(k)e^{ikx}+e^{-ikx} \qquad x\to+\infty, \qquad \text{(B)}. \quad (5.3)$$

全直線（(A) 群）の散乱問題では，単位振幅の右向き平面波 (e^{ikx}) を左の無限遠 $x=-\infty$ から送る．すると振幅 $r(k)\stackrel{\text{def}}{=}B(k)/A(k)$ で左向きの平面波 e^{-ikx} が左の無限遠 $x=-\infty$ で観測され，振幅 $t(k)\stackrel{\text{def}}{=}1/A(k)$ の右向き平面波 (e^{ikx}) が右の無限遠 $x=+\infty$ で観測される．半直線（(B) 群）の散乱問題では，単位振幅の左向き平面波 (e^{-ikx}) を右の無限遠 $x=+\infty$ から送る．するとそれが反射されて振幅 $r(k)$ の右向き平面波 (e^{ikx}) が右の無限遠 $x=+\infty$ で観測される．この場合には透過波は存在し得ない．透過振幅 $t(k)$ および反射振幅 $r(k)$ は，いずれも**位相のずれ** (phase shift) を含む複素数である．

波動関数 $\psi_k(x)$ (5.1) は，波数 k の解析関数なので，透過振幅 $t(k)$ および反射振幅 $r(k)$ は，k の有理型関数になる．上の漸近挙動を離散固有状態のもの

$$\mathcal{H}\phi_n(x)=\mathcal{E}(n)\phi_n(x),\ \mathcal{E}(0)<\mathcal{E}(1)<\mathcal{E}(2)<\cdots<\mathcal{E}(n_{\max})<0, \quad (5.4)$$

$$\phi_n(x)\approx c_\pm e^{\mp\sqrt{-\mathcal{E}(n)}\,x}, \quad x\to\pm\infty, \quad (5.5)$$

と比べてみると，$A(k)$ の零点，つまり透過振幅 $t(k)$ および反射振幅 $r(k)$ の**正の虚軸上の極** $k=i\kappa$, $\kappa\in\mathbb{R}_+$ が，離散スペクトル

$$r(k)\approx\frac{\text{const.}}{k-i\kappa}, \quad \kappa\in\mathbb{R}_+, \quad \exists n\in\{0,\ldots,n_{\max}\}, \quad -\kappa^2=\mathcal{E}(n), \quad (5.6)$$

に対応していることが判る．

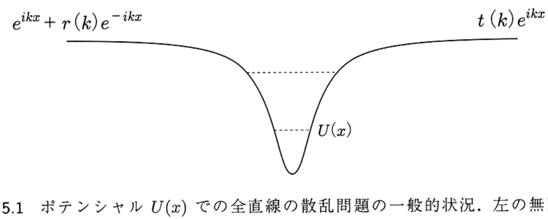


図 5.1　ポテンシャル $U(x)$ での全直線の散乱問題の一般的状況．左の無限遠 $x=-\infty$ から，単位振幅の右向き平面波 (e^{ikx}) が打ち込まれる．左の無限遠 $x=-\infty$ で，反射された波 e^{-ikx} が振幅 $r(k)$ で観測され，透過した波 e^{ikx} が右の無限遠 $x=+\infty$ で，振幅 $t(k)$ を持って観測される．点線は，離散固有準位を表す．

形状不変な系の散乱振幅は，形状不変性に由来する制限[49], [50]

$$\text{全直線}: t(k;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = \left(\frac{ik+W_+}{ik+W_-}\right) t(k;\boldsymbol{\lambda}), \tag{5.7}$$

$$r(k;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = \left(\frac{-ik+W_-}{ik+W_-}\right) r(k;\boldsymbol{\lambda}), \tag{5.8}$$

$$\text{半直線}: r(k;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = \left(\frac{ik+W_+}{-ik+W_+}\right) r(k;\boldsymbol{\lambda}), \tag{5.9}$$

$$W_\pm \stackrel{\text{def}}{=} -\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial_x \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})}{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})},$$

を受ける．これらは，形状不変性による波動関数の関係式

$$\psi_k(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) \propto \psi_k^{(1)}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\partial_x \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})}{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})}\right) \psi_k(x;\boldsymbol{\lambda}),$$

を，無限遠の漸近領域で評価して得られる．

2.3 節で紹介した非閉じ込め型の形状不変なポテンシャル，クーロン（2.3.2 節），モース（2.3.4 節），ローゼン・モース（2.3.6 節），双曲的対称こま II（2.3.7 節），エッカート（2.3.8），双曲的ポッシェル・テラー（2.3.9 節）については，すべて透過振幅，反射振幅が得られていて，上の形状不変性による制限 (5.7)–(5.9) も満たしている[49]．また，これらの散乱問題の多添え字拡張（5.3 節）も [49] に詳細に議論してある．

5.2 無反射ポテンシャル

シュレーディンガー方程式の**無反射ポテンシャル** (reflectionless potential), $r(k) \equiv 0$[51]は，理論物理学，数理物理学において，非常に重要な役割を果たしてきた．特別な時間依存性を与えると，それらは，コルトベーグ・ドフリース (Korteweg de Vries, KdV) 方程式の多重ソリトン解[52] になる．古典論的に考えると容易に判るように，無反射ポテンシャルは至る所で負 $U(x) < 0$, $-\infty < x < \infty$, でなければならない．もし $\max U(x) = U_{max} > 0$ とすると，エネルギーが U_{max} 以下の古典粒子は，必ず反射される．

N 個の離散固有状態を持つ無反射ポテンシャル $U_N(x)$

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + U_N(x), \qquad \mathcal{H}\psi_k(x) = k^2\psi_k(x), \tag{5.10}$$

$$\mathcal{H}\phi_{N,j}(x) = \mathcal{E}_j\phi_{N,j}(x), \quad \mathcal{E}_j = -k_j^2, \quad j = 1,\ldots,N, \tag{5.11}$$

$$0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_N,$$

を考えよう．ケイとモーゼス (Kay-Moses)[51]によるとそれは，次のような形になる:

$$U_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} -2\partial_x^2 \log u_N(x), \quad u_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det A_N(x), \tag{5.12}$$

$$(A_N(x))_{m\,n} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{m\,n} + \frac{c_m e^{-(k_m+k_n)x}}{k_m+k_n}, \quad m,n=1,\ldots,N. \tag{5.13}$$

ここで，$\{c_m\}$ は勝手な正のパラメタである．この $\{c_m\}$ に特別な時間依存性

$$c_j \to c_j e^{8k_j^3 t}, \quad j=1,\ldots,N,$$

を与えると，無反射ポテンシャル $U_N(x)$ は KdV 方程式の N ソリトン解 $U_N(x;t)$ に変わる[52]:

$$U_N(x;t) \stackrel{\text{def}}{=} -2\partial_x^2 \log u_N(x;t), \quad u_N(x;t) \stackrel{\text{def}}{=} \det A_N(x;t), \tag{5.14}$$

$$(A_N(x;t))_{m\,n} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{m\,n} + \frac{c_m e^{-(k_m+k_n)x+8k_m^3 t}}{k_m+k_n}, \tag{5.15}$$

$$0 = \partial_t U_N - 6U_N\partial_x U_N + \partial_x^3 U_N. \tag{5.16}$$

この $U_N(x)$ (5.12) の形から,「無反射ポテンシャルは，自明なポテンシャル $U(x)\equiv 0$ から多重ダルブー変換で作られる」だろうと想像される[53]．ポテンシャル $U(x)\equiv 0$ のシュレーディンガー方程式は，2 乗非可積分な指数関数種解

$$\psi_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{k_j x} + \tilde{c}_j e^{-k_j x}, \quad 0<k_1<k_2<\cdots<k_N, \tag{5.17}$$

$$(-1)^{j-1}\tilde{c}_j > 0, \tag{5.18}$$

$$-\partial_x^2\psi_j(x) = -k_j^2\psi_j(x), \quad j=1,\ldots,N.$$

を持つ．その逆数 $\{1/\psi_j(x)\}$ は，両方の無限遠点 $x=\pm\infty$ の近傍で，局所的に 2 乗可積分である．上に示したパラメタ $\{\tilde{c}_j\}$ (5.18) の符号の取り方で，種解 $\{\psi_j\}$ のロンスキアン $\mathrm{W}[\psi_1,\cdots,\psi_N](x)$ は，常に正で，それが対数 (log) を取って，2 階微分 ∂_x^2 が零になるような因子を除いて $u_N(x)$ に一致する:

$$\mathrm{W}[\psi_1,\cdots,\psi_N](x) = \prod_{j>l}^{N}(k_j-k_l)\cdot e^{\sum_{j=1}^N k_j x} u_N(x),$$

$$U_N(x) = -2\partial_x^2 \log \mathrm{W}[\psi_1,\cdots,\psi_N](x) = -2\partial_x^2 \log u_N(x). \tag{5.19}$$

ここで，$u_N(x)$ 中の $e^{-2k_j x}$ の係数を $c_j/(2k_j)$ と再定義した．同様な無反射ポテンシャルの導出は，既に 20 年以前に成されている[54]が，それには離散固有状態の記述はない．既に，1.5 節で説明 (1.55) したように，上で構成したポテンシャル $U_N(x)$ (5.19) は N 個の離散固有値 $\mathcal{E}_j=-k_j^2$ と対応する固有関数

$$\phi_{N,j}(x) \propto \frac{\mathrm{W}[\psi_1,\cdots,\breve{\psi}_j,\cdots,\psi_N](x)}{\mathrm{W}[\psi_1,\cdots,\psi_N](x)}, \quad j=1,\ldots,N, \tag{5.20}$$

を持つ．同じ多重ダルブー変換によって，元の $U(x)\equiv 0$ のシュレーディンガー方程式の右行き平面波解 e^{ikx} $(k>0)$ は，

$$e^{ikx} \to \frac{\mathrm{W}[\psi_1,\cdots,\psi_N,e^{ikx}](x)}{\mathrm{W}[\psi_1,\cdots,\psi_N](x)} \simeq \begin{cases} \prod_{j=1}^N(ik-k_j)\cdot e^{ikx} & x\to+\infty \\ \prod_{j=1}^N(ik+k_j)\cdot e^{ikx} & x\to-\infty \end{cases},$$

に写される．この漸近解では (5.2) の $B(k)\equiv 0$ となっており，無反射 $r(k)\equiv 0$ になっていることが判る．透過振幅は

$$t(k)=\prod_{j=1}^{N}\frac{ik-k_j}{ik+k_j}=\prod_{j=1}^{N}\frac{k+ik_j}{k-ik_j}, \tag{5.21}$$

で与えられ，$\mathcal{E}_j=-k_j^2$ の束縛状態 (5.6), (5.20) に対応する極 $k=ik_j$ を持つ．ここで，指数関数のロンスキアンがファンデルモンド (Vandermonde) 行列式

$$\mathrm{W}[e^{\alpha_1 x},e^{\alpha_2 x},\ldots,e^{\alpha_M x}](x)=\prod_{1\le k<j\le M}(\alpha_j-\alpha_k)\cdot e^{\sum_{j=1}^{M}\alpha_j x}, \tag{5.22}$$

になることを用いた．これが，無反射ポテンシャル (5.12) の別の導出法である．これにより，無反射性とその厳密可解性がきわめて直感的に理解できるであろう．無反射ポテンシャルは，形状不変性を持たない完全可解なポテンシャルの最も簡単なものであると言えよう．

5.3 可解な散乱問題の拡張

この節では，完全可解な散乱問題の多重ダルブー変換による拡張（変形）を論ずる[49]．用いるのは，多項式型種解の系 $\{\tilde\phi_{d_j}(x)\}$, $j=1,\ldots,M$, で，その多項式部分の次数を表す非負の整数の組 $\mathcal{D}=\{d_1,\ldots,d_M\}$ で指定されている．多項式型種解の漸近挙動は，**漸近指数** (asymptotic exponent) $\Delta_{\mathrm{v}}^{\pm}$ で特徴付けられる:

$$\tilde\phi_{\mathrm{v}}(x)\approx\begin{cases} e^{x\Delta_{\mathrm{v}}^{+}} & x\to+\infty \\ e^{x\Delta_{\mathrm{v}}^{-}} & x\to-\infty\end{cases}\quad (\mathrm{A}), \tag{5.23}$$

$$\tilde\phi_{\mathrm{v}}(x)\approx\quad e^{x\Delta_{\mathrm{v}}^{+}}\qquad x\to+\infty,\qquad(\mathrm{B}). \tag{5.24}$$

多項式型種解の系 $\{\tilde\phi_{d_j}(x)\}$, $j=1,\ldots,M$ を用いた多重ダルブー変換による拡張は，1.5 節の**定理 1.2** (1.53)–(1.55) に述べてある．変形されたポテンシャルが非特異であることを確認しておく必要がある．それには，ロンスキアン $\mathrm{W}[\tilde\phi_{d_1},\tilde\phi_{d_2},\ldots,\tilde\phi_{d_M}](x)$ が，全直線上 $-\infty<x<\infty$ (A), または半直線上 $0<x<\infty$ (B) で零点を持たなければよい．離散固有状態 $\{\phi_{\mathcal{D},n}^{(M)}(x)\}$ および散乱状態 $\{\psi_{\mathcal{D},k}^{(M)}(x)\}$ に関しては，変換は等スペクトルである．しかしながら，種解の種類によっては，基底状態エネルギー $\mathcal{E}(0)$ 以下に，余分な離散固有状態が付け加わることがある．その数は，使用した擬仮想状態波動関数の数に等しい．

変形ポテンシャル $-2\partial_x^2\log\bigl|\mathrm{W}[\tilde\phi_{d_1},\tilde\phi_{d_2},\ldots,\tilde\phi_{d_M}](x)\bigr|$ は，使用した種解 (5.23)–(5.24) の性質から，無限遠近傍 $x\to\pm\infty$ で漸近的に消える．変形を受けた連続スペクトルも $\mathcal{E}=0$ から始まり，波数 k とエネルギー $\mathcal{E}$ との関係 $\mathcal{E}=k^2$ は不変である．多添え字散乱振幅は，元々の波動関数 $\psi_k(x)$ (5.2)–(5.3)

および多項式型種解 $\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x)$ (5.23)–(5.24) の漸近的な振る舞いを使って，波動関数 $\psi^{(M)}_{\mathcal{D},k}(x)$ (1.54) から容易に得られる．全直線（(A) 群）上の散乱問題については

$$\psi^{(M)}_{\mathcal{D},k}(x) \approx \prod_{j=1}^{M}(ik-\Delta^{+}_{d_j})\cdot e^{ikx} \qquad x\to+\infty,$$

$$\psi^{(M)}_{\mathcal{D},k}(x) \approx \prod_{j=1}^{M}(ik-\Delta^{-}_{d_j})\cdot A(k)\,e^{ikx} + \prod_{j=1}^{M}(-ik-\Delta^{-}_{d_j})\cdot B(k)\,e^{-ikx} \qquad x\to-\infty,$$

となり，透過振幅および反射振幅は，多添え字を持った乗法的な変形を受ける:

$$(\mathrm{A}):\ t_{\mathcal{D}}(k)=\prod_{j=1}^{M}\frac{k+i\Delta^{+}_{d_j}}{k+i\Delta^{-}_{d_j}}\cdot t(k),\ r_{\mathcal{D}}(k)=(-1)^M\prod_{j=1}^{M}\frac{k-i\Delta^{-}_{d_j}}{k+i\Delta^{-}_{d_j}}\cdot r(k).$$

$\Delta^{+}_{\mathrm{v}}=\Delta^{-}_{\mathrm{v}}$ の種解を使った場合には，透過振幅が不変になる．半直線（(B) 群）上の散乱問題については，同様の計算から

$$(\mathrm{B}):\quad \psi^{(M)}_{\mathcal{D},k}(x) \approx \prod_{j=1}^{M}(ik-\Delta^{+}_{d_j})\cdot r(k)\,e^{ikx} + \prod_{j=1}^{M}(-ik-\Delta^{+}_{d_j})\cdot e^{-ikx} \qquad x\to+\infty,$$

$$(\mathrm{B}):\quad r_{\mathcal{D}}(k)=(-1)^M\prod_{j=1}^{M}\frac{k+i\Delta^{+}_{d_j}}{k-i\Delta^{+}_{d_j}}\cdot r(k),$$

を得る．可解な散乱振幅は，多添え字変形を受けた後も，波数 k の有理型関数である性質は変わらない．付け加わる極や零点はすべて虚 k 軸上にあり，使用した多項式型種解の漸近指数のみによって決定される．これらの結果の導出は一つの簡単な事実に依っている．指数関数達のロンスキアン $\mathrm{W}[e^{\alpha_1 x},e^{\alpha_2 x},\ldots,e^{\alpha_M x}](x)$ は，ファンデルモンド行列式 (5.22) に帰着され，波動関数 $\psi^{(M)}_{\mathcal{D},k}(x)$(1.54) の大部分の因子は分子と分母で相殺する．

5.4 具体例：$1/\cosh^2 x$ ポテンシャル

ここで一つの典型的な形状不変なポテンシャルの散乱問題を具体的に論じよう．2.3.5 節で紹介した $1/\cosh^2 x$ ポテンシャルだが，無限遠で漸近的に消える ($\lim_{x\to\pm\infty}U(x)=0$) ように定数部分を調節してある．有用なデータは，固有エネルギー，固有関数，散乱データ，つまり，透過振幅と反射振幅，種々の多項式型種解や飛び越し固有関数とそれらの漸近指数などである．

$1/\cosh^2 x$ ポテンシャルは，ソリトンポテンシャルと呼ばれることもある．

これは，有限個の離散固有状態 $0 \le n \le n_{\max}(\boldsymbol{\lambda}) = [h]'$ を持つ：

$$\boldsymbol{\lambda} = h, \quad \boldsymbol{\delta} = -1, \quad -\infty < x < \infty, \quad h > 1/2, \tag{5.25}$$

$$U(x;h) = -\frac{h(h+1)}{\cosh^2 x},\ \mathcal{E}(n;h) = -(h-n)^2,\ \eta(x) = \tanh x, \tag{5.26}$$

$$\phi_n(x;h) = (\cosh x)^{-h+n} \times P_n^{(h-n,h-n)}(\tanh x), \tag{5.27}$$

$$W_+ = -W_- = h.$$

ここに現れるヤコビ多項式の特殊形は，ゲーゲンバウアー多項式または超球多項式と呼ばれる．透過振幅と反射振幅は

$$t(k;h) = \frac{\Gamma(-h-ik)\Gamma(1+h-ik)}{\Gamma(-ik)\Gamma(1-ik)}, \tag{5.28}$$

$$r(k;h) = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(-h-ik)\Gamma(1+h-ik)}{\Gamma(-ik)\Gamma(-h)\Gamma(1+h)}. \tag{5.29}$$

これらは，形状不変性に由来する制限 (5.7)–(5.8) を満たす．

透過振幅 $t(k;h)$ (5.28) の分子にある最初のガンマ関数の因子から来る虚 k 軸の正部分の極，$-h-ik=-n, \Rightarrow k=i(h-n)$, $n=0,1,\ldots,[h]'$ が，上に述べた固有値スペクトルを与える．よく知られているように，整数の $h=N\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$ で，$r(k;N)$ の分母にあるガンマ関数 $\Gamma(-N)$ の極によって，無反射ポテンシャル $r(k;N)\equiv 0$ になっている．実際のところ，$U_N(x) = -N(N+1)/\cosh^2 x$ は，一般の無反射ポテンシャル (5.12)–(5.13) において，特別なパラメタの組

$$k_j = j, \quad c_j = \frac{(N+j)!}{j!(j-1)!(N-j)!}, \quad j=1,\ldots,N, \tag{5.30}$$

を選んだものになっている．ポテンシャル (5.26) と散乱振幅 (5.28) は，離散変換 $h \to -(h+1)$ について不変であるが，固有値と固有関数は不変でない．ユニタリ性の関係式 $|t(k;h)|^2 + |r(k;h)|^2 = 1$, $k\in\mathbb{R}_+$ が成り立つ．

このポテンシャルの散乱振幅の導出には，固有関数 (5.27) に含まれるゲーゲンバウアー多項式を，ガウスの超幾何関数 (1.65) で置き換える:

$$(2\cosh x)^{n-h}{}_2F_1\Bigl(\begin{matrix}-n,\ -n+2h+1\\ h-n+1\end{matrix}\Bigm|\frac{1-\tanh x}{2}\Bigr).$$

ここで，次数 n を $n=h+ik$ によって置き換えて，複素 k 平面に解析接続する．

$$(2\cosh x)^{ik}{}_2F_1\Bigl(\begin{matrix}-h-ik,\ 1+h-ik\\ 1-ik\end{matrix}\Bigm|\frac{1-\tanh x}{2}\Bigr). \tag{5.31}$$

これは，$x=+\infty$ で漸近的に単位振幅の右行き平面波 e^{ikx} に近づく．ガウスの超幾何関数の**接続公式** (connection formula)（[4] の (2.3.13) 参照）

$$\begin{aligned}&{}_2F_1\Bigl(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\Bigm|z\Bigr)\\ &\quad = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\cdot{}_2F_1\Bigl(\begin{matrix}\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta\\ \gamma-\alpha-\beta+1\end{matrix}\Bigm|1-z\Bigr)\end{aligned}$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\cdot {}_2F_1\Bigl(\begin{matrix}\alpha,\,\beta\\ \alpha+\beta-\gamma+1\end{matrix}\Bigm| 1-z\Bigr), \tag{5.32}$$

を使うと，上の波動関数 (5.31) の $x=-\infty$ での振る舞いが次のようになることが判る:

$$\frac{\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)}{\Gamma(-h-ik)\Gamma(1+h-ik)}\,e^{ikx}+\frac{\Gamma(1-ik)\Gamma(ik)}{\Gamma(1+h)\Gamma(-h)}\,e^{-ikx}.$$

単位振幅の右行き平面波 e^{ikx} が $x=-\infty$ から入射して，$x=+\infty$ へ $t(k)e^{ikx}$ として伝播し，$x=-\infty$ へ $r(k)e^{-ikx}$ として反射される．これから，(5.28) に与えた透過振幅 $t(k)$ および反射振幅 $r(k)$ (5.29) が判る．

多項式型種解

固有関数に離散対称性変換 $h\to -h-1$ を作用させると，基底状態の下に擬仮想状態の種解ができる:

$$\begin{aligned}&\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;h)=(\cosh x)^{h+1+\mathrm{v}}P_{\mathrm{v}}^{(-h-1-\mathrm{v},-h-1-\mathrm{v})}(\tanh x)\ \ (\mathrm{v}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}),\\ &\Delta_{\mathrm{v}}^{+}=h+1+\mathrm{v}>0,\quad \Delta_{\mathrm{v}}^{-}=-\Delta_{\mathrm{v}}^{+}<0,\\ &\qquad\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}(h)=\mathcal{E}(-\mathrm{v}-1;h)<\mathcal{E}(0;h).\end{aligned} \tag{5.33}$$

飛び越し固有関数は，次数 $\mathrm{v}>2h$ で，このポテンシャルの擬仮想状態となる:

$$\begin{aligned}&\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{os}}(x;h)=\phi_{\mathrm{v}}(x;h),\quad \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{os}}(h)=-(h-\mathrm{v})^2<\mathcal{E}(0;h)=-h^2\ \ (\mathrm{v}>2h),\\ &\Delta_{\mathrm{v}}^{+}=-h+\mathrm{v}>0,\quad \Delta_{\mathrm{v}}^{-}=-\Delta_{\mathrm{v}}^{+}<0.\end{aligned} \tag{5.34}$$

変形された散乱問題

擬仮想状態は，そのエネルギーの場所に新しい固有状態を付け加える．上の 2 種類の擬仮想状態，(5.33) と (5.34) とが，透過振幅と反射振幅とに，それぞれ正の虚 k 軸上の極 $k=i(\mathrm{v}+h+1)$, $k=i(\mathrm{v}-h)$ を付け加える．それが，使った種解のエネルギー，$-(h+\mathrm{v}+1)^2$ と $-(\mathrm{v}-h)^2$ とに対応している．上の 2 種類の擬仮想状態，(5.33) と (5.34) について，$\Delta_{\mathrm{v}}^{+}=-\Delta_{\mathrm{v}}^{-}$ となっている．このことから，変形された透過振幅と反射振幅とは，符号 $(-1)^M$ を除いて同じ変形因子を持つことになる:

$$\frac{t_{\mathcal{D}}(k;h)}{t(k;h)}=(-1)^M\frac{r_{\mathcal{D}}(k;h)}{r(k;h)}=\prod_{j=1}^{M}\frac{k-i\Delta_{d_j}^{-}}{k+i\Delta_{d_j}^{-}}. \tag{5.35}$$

この章までに展開してきた可解量子力学の概念・方法・結果の大部分は，シュレーディンガー方程式が 2 階の差分方程式の場合でも同様に成り立つ．これを，通常の量子力学 (ordinary Quantum Mechanics **oQM**) と対比して**離散量子力学** (discrete Quantum Mechanics **dQM**) と呼ぶことにしよう．

第 6 章
離散量子力学の一般的な定式化

1 次元離散量子力学 (1-d dQM) の力学変数は，通常の量子力学 (oQM) と同様に座標 x と共役運動量 $p=-i\partial_x$ である．dQM では，ハミルトニアンに運動量演算子が 2 乗 (p^2) でなく，指数関数 ($e^{\pm p}$) の形で現れる．離散量子力学から，適当な極限で通常の量子力学が得られるという意味で，dQM は oQM の自然な拡張になっている．また「ミクロの階梯を降りてゆくと，理論の中に基本的な長さが表れる」というハイゼンベルグの哲学にも合致している．dQM の固有関数に現れるのが，Askey-scheme の**超幾何直交多項式**（Askey-Wilson 多項式等）であり，oQM に現れた，エルミート，ラゲール，ヤコビ多項式はこれらから適当な極限で得られる．この章では，dQM 系全般の持つ普遍的性質を論じる．dQM に現れる多項式はなじみの薄いこともあり，原綴りを用いる．

6.1 因子化ハミルトニアン：離散量子力学

指数関数化された運動量演算子 $e^{\pm p}$ は，波動関数に差分演算子

$$e^{\pm\beta p}\psi(x)=\psi(x\mp i\beta)$$

として働く．波動関数のずらし $\pm i\beta$ が，純虚数，実数の 2 つの場合に応じて，(i) **純虚数ずらし，虚離散量子力学 (idQM)** $\beta=\gamma\in\mathbb{R}_{\neq 0}$ と (ii) **実数ずらし，実離散量子力学 (rdQM)** $\beta=i=\sqrt{-1}$ がある．oQM の場合と同様に，idQM, rdQM それぞれに 3 つの代表的な例 (i) idQM: Meixner-Pollaczek (MP)（パラメタ ϕ を $\phi=\frac{\pi}{2}$ に固定して簡単化したもの), Wilson (W) および Askey-Wilson (AW) 多項式，(ii) rdQM: Meixner (M), Racah (R) および q-Racah (qR) 多項式を選んで具体的な話を進めよう．idQM, $\psi(x\mp i\gamma)$ の場合には，波動関数およびポテンシャルが実軸あるいはその一部を含む変域で，x の解析関数であることが要求される．一方で rdQM では，差分方程式は，等間隔の格子上にある波動関数にのみ制限を与えることになる．そこで，実軸の

尺度を適当に選ぶことにより，変数 x が**非負の整数値**を取るようにできる．このために，rdQM の理論に固有多項式として現れる直交多項式は，「離散直交多項式」(orthogonal polynomials of a discrete variable)[55] とも呼ばれる．その最大次数は，有限 (N) あるいは無限である．まとめると 1 次元 dQM の力学変数 x は，連続あるいは離散の値を取る $(x_{\max} = N \text{ or } \infty)$:

$$\text{idQM}:\ x \in \mathbb{R}, \quad x \in (x_1, x_2)\ ; \quad \text{rdQM}:\ x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad x \in [0, x_{\max}].$$

ここで，x_1, x_2 は有限かあるいは，$-\infty$ または $+\infty$ である．これに応じて波動関数の内積は次の形になり，

$$\text{idQM}:\ (f, g) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)^* g(x) dx, \tag{6.1}$$

$$\text{rdQM}:\ (f, g) = \sum_{x=0}^{x_{\max}} f(x)^* g(x), \tag{6.2}$$

関数 $f(x)$ のノルムは，$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ となる．

oQM の場合と同様に，ハミルトニアンは有限個あるいは半無限個の半正定値の離散エネルギー準位を持つとしよう((1.3))．すると半正定値のハミルトニアンは因子化される，$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\text{idQM}: \mathcal{A} &\stackrel{\text{def}}{=} i\big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V^*(x)} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V(x)}\,\big), \qquad \gamma \in \mathbb{R}_{\neq 0},\\
\mathcal{A}^\dagger &= -i\big(\sqrt{V(x)}\,e^{\frac{\gamma}{2}p} - \sqrt{V^*(x)}\,e^{-\frac{\gamma}{2}p}\big),\ V(x) \in \mathbb{C},
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \sqrt{V(x)}e^{\gamma p}\sqrt{V^*(x)} + \sqrt{V^*(x)}e^{-\gamma p}\sqrt{V(x)}\\
&\quad - V(x) - V^*(x),
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
\text{rdQM}: \mathcal{A} &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B(x)} - e^{\partial}\sqrt{D(x)},\\
\mathcal{A}^\dagger &= \sqrt{B(x)} - \sqrt{D(x)}\,e^{-\partial},
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
&D(x) > 0\ (\text{for } x > 0), \quad D(0) = 0,\\
&B(x) > 0\ (\text{for } x \geq 0), \quad B(N) = 0\ (\text{有限の時}),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\sqrt{B(x)}e^{\partial}\sqrt{D(x)} - \sqrt{D(x)}e^{-\partial}\sqrt{B(x)}\\
&\quad + B(x) + D(x).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

ここで $*$ 演算は，次のように定義される．解析関数 $f(x) = \sum_n a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ が与えられたとき，$f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n a_n^* x^n$ である．a_n^* は a_n の複素共役である．idQM の解析関数 $V^*(x)$ は $V(x)$ から，$*$ 演算で得られる．$f^{**}(x) = f(x)$ と $f(x)^* = f^*(x^*)$ は明らかであろう．関数が $f^* = f$ を満たすとき，実軸上で実数値を取る．rdQM での境界条件 $D(0) = 0$ (6.6) は，$\mathcal{H}\psi(0)$ に $\psi(-1)$ が現れないために必要であり，また同様に，$B(N) = 0$ も有限の場合の上端の境界条件として必要である．大雑把に言って，これらの有限な端点は oQM での確

定特異点に対応する．idQM と rdQM のハミルトニアン (6.4), (6.7) は，統一的に

$$\text{dQM}:\mathcal{H}=\varepsilon\Big(\sqrt{V_+(x)}\,e^{\beta p}\sqrt{V_-(x)}+\sqrt{V_-(x)}\,e^{-\beta p}\sqrt{V_+(x)}\\ -V_+(x)-V_-(x)\Big), \tag{6.8}$$

$$\text{idQM}:\quad \beta=\gamma,\quad \varepsilon=1,\quad V_+(x)=V(x),\quad V_-(x)=V^*(x),$$
$$\text{rdQM}:\quad \beta=i,\quad \varepsilon=-1,\quad V_+(x)=B(x),\quad V_-(x)=D(x),$$

と書くことができる．

oQM と同様に，時間に依存しない差分シュレーディンガー方程式

$$\mathcal{H}\phi_n(x)=\mathcal{E}(n)\phi_n(x)\quad(n=0,1,2,\ldots), \tag{6.9}$$

の解は，因子化 $\phi_n(x)=\phi_0(x)P_n(\eta(x))$ ((1.62)) されており，基底状態の波動関数 $\phi_0(x)$ は演算子 $\mathcal{A}$ のゼロモードとして決定される，$\mathcal{A}\phi_0(x)=0$ ((1.8))．これは，1 階の差分方程式なので，解は容易に求まる．つまり，直交多項式に関する**モーメント問題**を解く必要はない．rdQM の正弦的座標 $\eta(x)$ は，x の単調増加関数で，境界条件

$$\text{rdQM}:\quad \eta(0)=0 \tag{6.10}$$

を満たす．これに対応して，固有多項式には，

$$\text{rdQM}:\quad P_n(0)=1\quad(n=0,1,\ldots) \tag{6.11}$$

の正規化条件を課すことにする．

微分方程式と差分方程式の大きな違いは，解の**一意性**にある．線形微分方程式の解は，初期条件を指定すれば，一意的に決まるが，差分シュレーディンガー方程式 (6.9) の解に周期 $i\gamma$ (idQM) あるいは 1 (rdQM) の任意関数（**擬定数**）を掛けても解である．idQM の場合には，この非一意性は，基底状態の波動関数 ϕ_0 の内積 (6.1) に関する 2 乗可積分性 $(\phi_0,\phi_0)<\infty$ およびハミルトニアンのエルミート性（自己共役性）を課すことにより除かれる[30]．idQM ハミルトニアンのエルミート性（自己共役性）については，次節（6.2 節）で詳しく論じる．rdQM の場合は，整数格子上の固有関数の値だけが内積 (6.2) に関係してくるので，周期 1 の不定性は無害である．この擬定数の不定性は，多項式方程式 (6.12) の解には現れてこないことに注意しよう．

多項式 $P_n(\eta(x))$ に対する 2 階の方程式（(6.13), (6.14) 参照）

$$\widetilde{\mathcal{H}}P_n(\eta(x))=\mathcal{E}(n)P_n(\eta(x)),\ (n=0,1,\ldots), \tag{6.12}$$

には，根号が出てこないことを強調しておこう．言い換えると，基底状態の波動関数 ϕ_0 によって相似変換したハミルトニアン $\widetilde{\mathcal{H}}\stackrel{\text{def}}{=}\phi_0(x)^{-1}\circ\mathcal{H}\circ\phi_0(x)$

(1.67) は，元のハミルトニアン $\mathcal{H}$ より，ずっと簡単な形である:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \varepsilon\Big(V_+(x)(e^{\beta p}-1) + V_-(x)(e^{-\beta p}-1)\Big) \tag{6.13}$$

$$= \begin{cases} V(x)(e^{\gamma p}-1) + V^*(x)(e^{-\gamma p}-1) & : \mathrm{idQM} \\ B(x)(1-e^{\partial}) + D(x)(1-e^{-\partial}) & : \mathrm{rdQM} \end{cases}. \tag{6.14}$$

$\widetilde{\mathcal{H}}$ が $\eta(x)$ で張られた基底で三角性 (1.68), (1.69) を持つことは，oQM の時と同様である．

idQM $(0<q<1)$ のポテンシャルの具体形を挙げよう:

$$\mathrm{MP}: V(x) = a + ix,\ a>0,\ -\infty < x < \infty,\ \gamma = 1,\ \eta(x) = x, \tag{6.15}$$

$$\mathrm{W}: V(x) = \frac{\prod_{j=1}^4 (a_j + ix)}{2ix(2ix+1)},\ \mathrm{Re}(a_j) > 0,\ 0 < x < \infty,\ \gamma = 1,$$
$$\eta(x) = x^2, \qquad \{a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \tag{6.16}$$

$$\mathrm{AW}: V(x) = \frac{\prod_{j=1}^4 (1 - a_j e^{ix})}{(1-e^{2ix})(1-q\,e^{2ix})},\ |a_j| < 1,\ 0 < x < \pi,\ \gamma = \log q,$$
$$\eta(x) = \cos x, \qquad \{a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}. \tag{6.17}$$

MP では，$x \to \pm\infty$ で $V(x)$ が無限大にゆき，閉じ込め型になっている．W では，端点の $x \to 0$ および $x \to \infty$ で $V(x)$ は発散し，閉じ込め型になっている．AW では，$V(x)$ の分母の $1-e^{2ix}$ が端点の $x = 0, \pi/2$ で 0 にゆき，閉じ込めを実現している．

rdQM $(0<q<1)$ のポテンシャルの具体形は:

$$\mathrm{M}: B(x) = \frac{c}{1-c}(x+\beta), \quad D(x) = \frac{1}{1-c}x, \quad \beta > 0, \quad 0 < c < 1,$$
$$\eta(x) = x, \quad x_{\max} = \infty, \tag{6.18}$$

$$\mathrm{R}: B(x) = -\frac{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}{(2x+d)(2x+1+d)},$$
$$D(x) = -\frac{(x+d-a)(x+d-b)(x+d-c)x}{(2x-1+d)(2x+d)},$$
$$a = -N, \quad a+b > d > 0, \quad 0 < c < 1+d,$$
$$\eta(x) = x(x+d), \quad x_{\max} = N,\ \tilde{d} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a+b+c-d-1, \tag{6.19}$$

$$q\mathrm{R}: B(x) = -\frac{(1-aq^x)(1-bq^x)(1-cq^x)(1-dq^x)}{(1-dq^{2x})(1-dq^{2x+1})},$$
$$D(x) = -\tilde{d}\,\frac{(1-a^{-1}dq^x)(1-b^{-1}dq^x)(1-c^{-1}dq^x)(1-q^x)}{(1-dq^{2x-1})(1-dq^{2x})},$$
$$a = q^{-N}, \quad 0 < ab < d < 1, \quad qd < c < 1,\ \tilde{d} \stackrel{\mathrm{def}}{=} abcd^{-1}q^{-1},$$
$$\eta(x) = (q^{-x}-1)(1-dq^x), \quad x_{\max} = N. \tag{6.20}$$

R および qR の場合には，本来は $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$ で指定された 4 つの異なるパラメ

タ化が可能である[29]が，ここでは簡単のために $\epsilon=\epsilon'=1$ の場合のみを記した．R (6.19) および qR (6.20) では，$B(x)$, $D(x)$ が a, b, c について対称であり，これは通常のパラメタの取り方[4],[6]とは異なることに注意しよう．この対称性が，後に新しい直交多項式を導入する際（第 9 章）に役に立つ．

固有多項式の具体形は以下の通り（記号は，付録 A 参照）．idQM では，

$$\text{MP}: P_n(\eta(x))=P_n^{(a)}(x;\tfrac{\pi}{2})\stackrel{\text{def}}{=}\frac{(2a)_n}{n!}\,i^n{}_2F_1\Bigl(\begin{matrix}-n,\ a+ix\\ 2a\end{matrix}\Bigm|2\Bigr),\quad(6.21)$$

$$\begin{aligned}\text{W}: P_n(\eta(x))&=W_n(x^2\,;a_1,a_2,a_3,a_4)\quad(b_1\stackrel{\text{def}}{=}a_1+a_2+a_3+a_4)\\ &\stackrel{\text{def}}{=}(a_1+a_2)_n(a_1+a_3)_n(a_1+a_4)_n\\ &\quad\times{}_4F_3\Bigl(\begin{matrix}-n,\ n+b_1-1,\ a_1+ix,\ a_1-ix\\ a_1+a_2,\ a_1+a_3,\ a_1+a_4\end{matrix}\Bigm|1\Bigr),\end{aligned}\quad(6.22)$$

$$\begin{aligned}\text{AW}: P_n(\eta(x))&=p_n(\cos x\,;a_1,a_2,a_3,a_4|q)\qquad(b_4\stackrel{\text{def}}{=}a_1a_2a_3a_4)\\ &\stackrel{\text{def}}{=}a_1^{-n}(a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4\,;q)_n\\ &\quad\times{}_4\phi_3\Bigl(\begin{matrix}q^{-n},\ b_4q^{n-1},\ a_1e^{ix},\ a_1e^{-ix}\\ a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_1a_4\end{matrix}\Bigm|q\,;q\Bigr).\end{aligned}\quad(6.23)$$

ここで，$P_n^{(a)}(x;\phi)$, $W_n(x^2\,;a_1,a_2,a_3,a_4)$ および $p_n(\cos x\,;a_1,a_2,a_3,a_4|q)$ は，それぞれ MP, W, AW 多項式の標準的な[4]~[6]記号である．

rdQM では，

$$\text{M}:\ P_n(\eta(x))=M_n(x\,;\beta,c)\stackrel{\text{def}}{=}{}_2F_1\Bigl(\begin{matrix}-n,\ -x\\ \beta\end{matrix}\Bigm|1-c^{-1}\Bigr),\qquad(6.24)$$

$$\begin{aligned}\text{R}:\ P_n(\eta(x))&=R_n(x(x+d)\,;a-1,\tilde d-a,c-1,d-c)\\ &\stackrel{\text{def}}{=}{}_4F_3\Bigl(\begin{matrix}-n,\ n+\tilde d,\ -x,\ x+d\\ a,\ b,\ c\end{matrix}\Bigm|1\Bigr),\end{aligned}\qquad(6.25)$$

$$\begin{aligned}q\text{R}:\ P_n(\eta(x))&=R_n(q^{-x}+dq^x\,;aq^{-1},\tilde da^{-1},cq^{-1},dc^{-1}|q)\\ &\stackrel{\text{def}}{=}{}_4\phi_3\Bigl(\begin{matrix}q^{-n},\ \tilde dq^n,\ q^{-x},\ dq^x\\ a,\ b,\ c\end{matrix}\Bigm|q\,;q\Bigr).\end{aligned}\qquad(6.26)$$

ここでも，$M_n(x\,;\beta,c)$, $R_n(x(x+d)\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, $R_n(q^{-x}+dq^x\,;\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ は，M, R, qR 多項式の標準的な[4]~[6]記号である．R, qR の多項式 $P_n(\eta(x))$ の正弦的座標 $\eta(x)=x(x+d)$ (:R), $\eta(x)=(q^{-x}-1)(1-dq^x)$ (:qR) のパラメタ依存性について一言述べよう．idQM の場合と異なり，rdQM の正弦的座標 $\eta(x)$ は一般に，系のパラメタに依存する，$\eta(x;\boldsymbol{\lambda})$．$R$ を x の多項式の作る環（R の場合），あるいは q^x のローラン多項式の作る環（qR の場合）としよう．そこに内部自己同型写像 $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I}(x)=-x-d\quad:\text{R},\qquad\mathcal{I}(q^x)=q^{-x}d^{-1}\quad:q\text{R}.\qquad(6.27)$$

を導入する．明らかに対合 (involution) $\mathcal{I}^2=\text{id}$ である．次の注意は重要である．

注意　もし，x (q^x) の多項式（ローラン多項式）$\check{f}$ が上の対合について不変であるならば，それは正弦的座標 $\eta(x)$ の多項式である:

$$\mathcal{I}\big(\check{f}(x)\big)=\check{f}(x)\ \Leftrightarrow\ \check{f}(x)=f\big(\eta(x;\boldsymbol{\lambda})\big). \tag{6.28}$$

構成から基底状態固有関数の 2 乗 $\phi_0(x)^2$ が多項式達の正定値な直交重み関数を与える:

$$\text{idQM}:\quad \int_{x_1}^{x_2}\phi_0(x)^2P_n(\eta(x))P_n(\eta(x))dx=h_n\delta_{nm}, \tag{6.29}$$

$$\text{rdQM}:\quad \sum_{x=0}^{x_{\max}}\phi_0(x)^2P_n(\eta(x))P_n(\eta(x))=\frac{1}{d_n^2}\delta_{n\,m}. \tag{6.30}$$

ここで rdQM のノルム公式 (6.30) で，h_n の代わりに，$1/d_n^2$ としたのは，双対多項式の概念に基づく（8.2 節参照）．$\phi_0(x)^2$ の具体形 (6.36) の x 依存性と，d_n^2 の (6.37) の n 依存性を見比べて欲しい．

idQM では，ゼロモードの方程式 $\mathcal{A}\phi_0(x)=0$ (1.8) は，

$$\sqrt{V^*(x-i\tfrac{\gamma}{2})}\,\phi_0(x-i\tfrac{\gamma}{2})=\sqrt{V(x+i\tfrac{\gamma}{2})}\,\phi_0(x+i\tfrac{\gamma}{2}). \tag{6.31}$$

以下に見るように，$\phi_0(x)^2$ および h_n, d_n^2 はガンマ関数（階乗関数）(A.9) および q-ガンマ関数 (A.10) である:

$$\phi_0(x)^2=\begin{cases}\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix) & :\text{MP}\\ \big(\Gamma(2ix)\Gamma(-2ix)\big)^{-1}\prod_{j=1}^{4}\Gamma(a_j+ix)\Gamma(a_j-ix) & :\text{W}\\ (e^{2ix};q)_\infty(e^{-2ix};q)_\infty\\ \qquad\times\prod_{j=1}^{4}\big((a_je^{ix};q)_\infty(a_je^{-ix};q)_\infty\big)^{-1} & :\text{AW}\end{cases}, \tag{6.32}$$

$$h_n=\begin{cases}2\pi(2^{2a}n!)^{-1}\Gamma(n+2a) & :\text{MP}\\ 2\pi n!\,(n+b_1-1)_n\\ \qquad\times\prod_{1\le i<j\le 4}\Gamma(n+a_i+a_j)\cdot\Gamma(2n+b_1)^{-1} & :\text{W}\\ 2\pi(b_4q^{n-1};q)_n(b_4q^{2n};q)_\infty(q^{n+1};q)_\infty^{-1}\\ \qquad\times\prod_{1\le i<j\le 4}(a_ia_jq^n;q)_\infty^{-1} & :\text{AW}\end{cases}. \tag{6.33}$$

ここで, $(a;q)_n$, $((a;q)_\infty)$ は(無限まで)ずらした q-階乗関数である (A.2),(A.3).

rdQM では，ゼロモードの方程式 $\mathcal{A}\phi_0(x)=0$ (1.8) は，二項漸化式

$$\sqrt{B(x)}\phi_0(x)=\sqrt{D(x+1)}\phi_0(x+1),\quad x=0,1,\ldots, \tag{6.34}$$

になるので，境界条件 (6.6) を用いて簡単に解ける:

$$\phi_0(x) = \sqrt{\prod_{y=0}^{x-1} \frac{B(y)}{D(y+1)}}, \quad \phi_0(0) = 1, \tag{6.35}$$

$$\phi_0(x)^2 = \begin{cases} \dfrac{(\beta)_x\, c^x}{x!} & : \mathrm{M} \\ \dfrac{(a,b,c,d)_x}{(1+d-a, 1+d-b, 1+d-c, 1)_x}\, \dfrac{2x+d}{d} & : \mathrm{R} \\ \dfrac{(a,b,c,d\,;q)_x}{(a^{-1}dq, b^{-1}dq, c^{-1}dq, q\,;q)_x\, \tilde{d}^x}\, \dfrac{1-dq^{2x}}{1-d} & : q\mathrm{R} \end{cases}, \tag{6.36}$$

$$d_n^2 = \begin{cases} \dfrac{(\beta)_n\, c^n}{n!} \times (1-c)^\beta & : \mathrm{M} \\ \dfrac{(a,b,c,\tilde{d})_n}{(1+\tilde{d}-a, 1+\tilde{d}-b, 1+\tilde{d}-c, 1)_n}\, \dfrac{2n+\tilde{d}}{\tilde{d}} & \\ \quad \times \dfrac{(-1)^N (1+d-a, 1+d-b, 1+d-c)_N}{(\tilde{d}+1)_N (d+1)_{2N}} & : \mathrm{R} \\ \dfrac{(a,b,c,\tilde{d}\,;q)_n}{(a^{-1}\tilde{d}q, b^{-1}\tilde{d}q, c^{-1}\tilde{d}q, q\,;q)_n\, d^n}\, \dfrac{1-\tilde{d}q^{2n}}{1-\tilde{d}} & \\ \times \dfrac{(-1)^N (a^{-1}dq, b^{-1}dq, c^{-1}dq\,;q)_N\, \tilde{d}^N q^{\frac{1}{2}N(N+1)}}{(\tilde{d}q\,;q)_N (dq\,;q)_{2N}} & : q\mathrm{R} \end{cases}. \tag{6.37}$$

ここで，上の表式は，双対性 (8.24) を考慮して $d_n^2 = (d_n^2/d_0^2) \times d_0^2$ の形で書いてある．後半の d_0^2 は，$\sum_x \phi_0(x)^2 = 1/d_0^2$ の条件から決まる．

ここで h_n (6.33) および d_n^2 (6.37) の n 依存性は，2.2 節で形状不変性を用いて導かれた公式 (2.13) から容易に得られる．rdQM での直交重み関数 $\phi_0(x)^2$ (6.35), (6.36) を x について解析接続すると，定義域の外側，つまり $x \in \mathbb{Z}_{<0}$ と $x \in \mathbb{Z}_{>x_{\max}}$ では，消えていることを強調しよう．idQM での因子化ハミルトニアンの最初の例は，Meixner-Pollaczek 多項式についてのもの[56]である．

dQM の他の系は，W, AW および R, qR のパラメタの制限および適当な極限操作で得られる．W, AW からは，continuous (dual) (q-)Hahn, Al-Salam-Chihara, continuous (big) q-Hermite, continous q-Jacobi (Laguerre), q-Meixner-Pollaczek 等が得られる[6], [30]．R, qR からは，(dual) (q-)Hahn, (affine, quantum) (q-)Krawtchouk, (alternative) (q-)Charlier, (q-)Meixner, little q-Jacobi (Laguerre), Al-Salam-Carlitz II 等が得られる[6], [29]．

6.2 解析性とエルミート性（自己共役性）：idQM

本節では，離散量子力学系のハミルトニアンのエルミート性（自己共役性）を論じる．実数ずらし (rdQM) の場合は，有限行列 ($x_{\max}=N$) では，エルミート性は自明に成り立っているし，無限行列の場合でも，直交測度が Jackson 積分で与えられる場合以外では，問題がないと言ってよい．しかし，純虚数ずらし (idQM) のハミルトニアンの自己共役性は，通常の量子力学の場合より大分込み入ってくる[30], [57]．ここでハミルトニアン (6.4) の自己共役性の問題を，多添え字 Wilson および Askey-Wilson 系 (6.64)–(6.65), (6.72)–(6.74) にも適用できるようにまとめておこう．元々の Wilson および Askey-Wilson 系のハミルトニアン (6.16)–(6.17) の自己共役性は，[30], [57] に詳述してある．

次の形の関数 $f(x)=\phi_0(x)\check{\mathcal{R}}(x)$ を考える．$\phi_0(x)^2$ と $\check{\mathcal{R}}(x)$ は有理関数で，実条件 $\check{\mathcal{R}}^*(x)=\check{\mathcal{R}}(x)$ を満たす．そのような関数 2 つ $f_1=\phi_0\check{\mathcal{R}}_1$ と $f_2=\phi_0\check{\mathcal{R}}_2$ を取ると，自己共役性の条件 $(f_1,\mathcal{H}f_2)=(\mathcal{H}f_1,f_2)$ は，次のようになる:

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\big(G(x-i\tfrac{\gamma}{2})+G^*(x+i\tfrac{\gamma}{2})\big)=\int_{x_1}^{x_2}dx\big(G(x+i\tfrac{\gamma}{2})+G^*(x-i\tfrac{\gamma}{2})\big). \tag{6.38}$$

ここで $G(x)$ の定義は，

$$\begin{aligned}&G(x)=V(x+i\tfrac{\gamma}{2})\phi_0(x+i\tfrac{\gamma}{2})^2\check{\mathcal{R}}_1(x+i\tfrac{\gamma}{2})\check{\mathcal{R}}_2(x-i\tfrac{\gamma}{2}),\\&\Big(\Rightarrow G^*(x)=V(x+i\tfrac{\gamma}{2})\phi_0(x+i\tfrac{\gamma}{2})^2\check{\mathcal{R}}_1(x-i\tfrac{\gamma}{2})\check{\mathcal{R}}_2(x+i\tfrac{\gamma}{2})\Big),\end{aligned} \tag{6.39}$$

である．ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の中の $V(x)+V^*(x)$ は，この計算では相殺されているが，区間 $x_1\le x\le x_2$ では，$V(x)+V^*(x)$ は，非特異でなければならないし，積分 $\int_{x_1}^{x_2}dx\,V(x)\phi_0(x)^2\check{\mathcal{R}}_1(x)\check{\mathcal{R}}_2(x)$ も有限でなければならない．留数定理によって，条件 (6.38) は，

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}}dx\big(G(x_2+ix)-G^*(x_2-ix)\big)\\&\qquad-\int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}}dx\big(G(x_1+ix)-G^*(x_1-ix)\big)\\&=2\pi\frac{\gamma}{|\gamma|}\sum_{x_0:\text{pole in }D_\gamma}\text{Res}_{x_0}\big(G(x)-G^*(x)\big),\end{aligned} \tag{6.40}$$

のように書き換えられる．ここで，関数 $G(x)-G^*(x)$ の留数は，矩形領域 D_γ

$$D_\gamma\overset{\text{def}}{=}\big\{x\in\mathbb{C}\ \big|\ x_1\le\text{Re}\,x\le x_2,|\text{Im}\,x|\le\tfrac{1}{2}|\gamma|\big\}, \tag{6.41}$$

の内部のものを取る．

元々の系では，$\phi_0(x)$ は (6.32) で与えられ，$\check{\mathcal{R}}(x)=P_n(\eta(x))$ である．パ

ラメタの制限とポテンシャルの具体形より，

$$(6.16)\text{–}(6.17) \Leftrightarrow V(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})\phi_0(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})^2 \text{ は } D_\gamma \text{ に極なし．} \quad (6.42)$$

これより，元々の系の自己共役性が成り立つ．変形後の例では，$\check{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{R}\big(\eta(x)\big)$ は，$\eta(x)$ の有理関数で，$V(x)\phi_0(x)^2$ は $(V\phi_0^2)_{\text{original}} \times (\eta(x)$ の有理関数) の形をしている．しかしながら，変形後の系では，$(V\phi_0^2)_{\text{original}}$ のパラメタがずれているので，矩形領域 D_γ 中に極を持たないことを一概に主張できない．また ($\eta(x)$ の有理関数) 部分が矩形領域 D_γ 中に極を持ったとしても，それらの留数が相殺する可能性があることに注意しよう．まとめると，多添え字直交多項式を構成するための変形では，個々の系についてパラメタの値域を制限して，$G(x)$ が矩形領域 D_γ 中に極を持たないようにするか，複数の極の留数が相殺する必要がある．

6.3　クラムの定理と絡み合わせ関係式：離散量子力学

1.3 節で示したように，クラムの定理と絡み合わせ関係式は，因子化ハミルトニアン $\mathcal{H} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ の帰結であるので，1.3 節の公式 (1.11)–(1.17) がそのまま離散量子力学でも成り立つ．しかし，各段階での諸量の具体的表式は異なってくる．各段階で最低固有状態を削除してゆくので，rdQM の $x_{\max}$ が有限なものについては，$x_{\max} \to x_{\max} - 1$ となることに注意しよう．

第 s 番目の段階の諸量は，第 $(s-1)$ 番目 $(s \geq 1)$ の段階のものから定義される:

$$
\begin{aligned}
&\phi_n^{[s]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{[s-1]}\phi_n^{[s-1]}(x), \quad n = s, s+1, \ldots,\\
\text{idQM}: \ &V^{[s]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V^{[s-1]}(x-i\tfrac{\gamma}{2})V^{[s-1]*}(x-i\tfrac{\gamma}{2})}\,\frac{\phi_s^{[s]}(x-i\gamma)}{\phi_s^{[s]}(x)},\\
&\mathcal{A}^{[s]} \stackrel{\text{def}}{=} i\Big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V^{[s]*}(x)} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V^{[s]}(x)}\Big),\\
&\mathcal{A}^{[s]\,\dagger} = -i\Big(\sqrt{V^{[s]}(x)}\,e^{\frac{\gamma}{2}p} - \sqrt{V^{[s]*}(x)}\,e^{-\frac{\gamma}{2}p}\Big),\\
\text{rdQM}: \ &B^{[s]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B^{[s-1]}(x+1)D^{[s-1]}(x+1)}\,\frac{\phi_s^{[s]}(x+1)}{\phi_s^{[s]}(x)},\\
&D^{[s]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B^{[s-1]}(x)D^{[s-1]}(x)}\,\frac{\phi_s^{[s]}(x-1)}{\phi_s^{[s]}(x)},\\
&\mathcal{A}^{[s]} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B^{[s]}(x)} - e^{\partial}\sqrt{D^{[s]}(x)},\\
&\mathcal{A}^{[s]\dagger} = \sqrt{B^{[s]}(x)} - \sqrt{D^{[s]}(x)}\,e^{-\partial}.
\end{aligned}
$$

第 s 番目の段階の固有関数は，**カソラティアン** (Casoratian) を用いて簡潔な**行列式表示**ができる $(n \geq s \geq 0)$．idQM では

$$x_j^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} x + i(\tfrac{n+1}{2} - j)\gamma, \tag{6.43}$$

$$\mathrm{W}_\gamma[f_1, \ldots, f_m](x) \stackrel{\text{def}}{=} i^{\frac{1}{2}m(m-1)} \det\Big(f_k(x_j^{(m)})\Big)_{1\le j,k\le m}, \tag{6.44}$$

$$\phi_n^{[s]}(x) = \prod_{j=0}^{s-1} \sqrt{V^{[j]}(x + i\tfrac{s-j}{2}\gamma)} \cdot \frac{\mathrm{W}_\gamma[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_n](x)}{\mathrm{W}_\gamma[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}](x - i\frac{\gamma}{2})}. \tag{6.45}$$

rdQM では,

$$\mathrm{W}_C[f_1, \ldots, f_m](x) \stackrel{\text{def}}{=} \det\Big(f_k(x + j - 1)\Big)_{1\le j,k\le m}, \tag{6.46}$$

$$\phi_n^{[s]}(x) = (-1)^s \prod_{k=0}^{s-1} \sqrt{B^{[k]}(x)} \cdot \frac{\mathrm{W}_C[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_n](x)}{\mathrm{W}_C[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}](x+1)} \tag{6.47}$$

$$= (-1)^s \prod_{k=0}^{s-1} \sqrt{D^{[k]}(x + s - k)} \cdot \frac{\mathrm{W}_C[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}, \phi_n](x)}{\mathrm{W}_C[\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{s-1}](x)}. \tag{6.48}$$

これらの結果を導くのに有用なカソラティアンの公式は，idQM では[58], [59]，

$$\mathrm{W}_\gamma[f_1, \ldots, f_n]^*(x) = \mathrm{W}_\gamma[f_1^*, \ldots, f_n^*](x),$$

$$\mathrm{W}_\gamma[gf_1, gf_2, \ldots, gf_n] = \prod_{j=1}^{n} g\big(x_j^{(n)}\big) \cdot \mathrm{W}_\gamma[f_1, f_2, \ldots, f_n](x), \tag{6.49}$$

$$\mathrm{W}_\gamma\big[\mathrm{W}_\gamma[f_1, f_2, \ldots, f_n, g], \mathrm{W}_\gamma[f_1, f_2, \ldots, f_n, h]\big](x)$$
$$= \mathrm{W}_\gamma[f_1, f_2, \ldots, f_n](x)\, \mathrm{W}_\gamma[f_1, f_2, \ldots, f_n, g, h](x) \quad (n \ge 0), \tag{6.50}$$

$$\lim_{\gamma\to 0} \gamma^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \mathrm{W}_\gamma[f_1, f_2, \ldots, f_n](x) = \mathrm{W}\,[f_1, f_2, \ldots, f_n](x). \tag{6.51}$$

すぐ上の式では，関数 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ は γ に直接依らないと仮定している．rdQM に現れるカソラティアンの公式は[60]

$$\mathrm{W}_C[gf_1, gf_2, \ldots, gf_n](x) = \prod_{k=0}^{n-1} g(x+k) \cdot \mathrm{W}_C[f_1, f_2, \ldots, f_n](x), \tag{6.52}$$

$$\mathrm{W}_C\big[\mathrm{W}_C[f_1, f_2, \ldots, f_n, g], \mathrm{W}_C[f_1, f_2, \ldots, f_n, h]\big](x)$$
$$= \mathrm{W}_C[f_1, f_2, \ldots, f_n](x+1)\, \mathrm{W}_C[f_1, f_2, \ldots, f_n, g, h](x)\ (n \ge 0). \tag{6.53}$$

これらは，1.3 節で絡み合わせ関係式を導く際に用いたロンスキアン公式 (1.23)–(1.25) の離散量子力学の対応物である．

6.3.1 特別な場合

idQM の Askey-Wilson 系 (6.17) の 2 つの特別な場合を考えよう．最初は

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, -1, \sqrt{q}, -\sqrt{q}) \ \Rightarrow\ V(x) = V^*(x) = 1, \tag{6.54}$$

$$\mathcal{H} = e^{-i\gamma\partial} + e^{i\gamma\partial} - 2, \quad \mathcal{A} = i(e^{-i\gamma\partial/2} - e^{i\gamma\partial/2}).$$

これは，AW の通常のパラメタの範囲 $|a_j|<1$, (6.17) の境界上で，閉じ込め型ポテンシャルになっていない．つまり，離散量子力学の例ではない．容易に判るように，この差分方程式の固有関数系は第 1 種のチェビシェフ多項式（1.3.1 節参照）

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}\phi_n(x)=\mathcal{E}(n)\phi_n(x),\\&\phi_n(x)=\cos nx=T_n(\cos x),\quad \mathcal{E}(n)=(q^{-n}-1)(1-q^n),\\&\mathcal{A}\phi_n(x)=-(q^{n/2}-q^{-n/2})\sin nx,\end{aligned}$$

になる．実際に ${}_4\phi_3$ で表される Askey-Wilson 多項式が $\cos nx$ に比例する

$${}_4\phi_3\Bigl(\begin{matrix}q^{-n},\,q^n,e^{ix},\,e^{-ix}\\-1,\,\sqrt{q},\,-\sqrt{q}\end{matrix}\Bigm|q\,;q\Bigr)\propto\cos nx,\quad n=0,1,\ldots,\tag{6.55}$$

ことを確かめるのは面白い．

クラムの処方に従い，新しいハミルトニアンを

$$\mathcal{H}^{(1)}\overset{\text{def}}{=}q\bigl(\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger-\mathcal{E}(1)\bigr)=q\bigl(e^{-i\gamma\partial}+e^{i\gamma\partial}\bigr)-(1+q^2),$$

で定義すると，その固有関数系が第 2 種のチェビシェフ多項式（1.3.1 節参照）で与えられることが判る:

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^{(1)}\phi_n^{(1)}(x)=\mathcal{E}^{(1)}(n)\phi_n^{(1)}(x),\ \mathcal{E}^{(1)}(n)=(q^{-n}-1)(1-q^{n+2}),\\&\phi_n^{(1)}(x)=\sin(n+1)x=\phi_0^{(1)}(x)U_n(\cos x),\quad n=0,1,\ldots.\end{aligned}$$

次のような閉じ込め型ポテンシャル関数を取ると，

$$\begin{aligned}&V^{(1)}(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1-q^2e^{2ix}}{1-e^{2ix}},\quad V^{(1)*}(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1-q^2e^{-2ix}}{1-e^{-2ix}},\\&V^{(1)}(x)V^{(1)*}(x-i\gamma)=q^2,\quad V^{(1)}(x)+V^{(1)*}(x)=1+q^2,\end{aligned}\tag{6.56}$$

となるために，

$$\mathcal{H}^{(1)}=\mathcal{A}^{(1)\dagger}\mathcal{A}^{(1)},\quad \mathcal{A}^{(1)}\overset{\text{def}}{=}i\Bigl(e^{-i\gamma\partial/2}\sqrt{V^{(1)*}(x)}-e^{i\gamma\partial/2}\sqrt{V^{(1)}(x)}\Bigr),$$

が判る．上のポテンシャル (6.56) は，Askey-Wilson 系 (6.17) で，パラメタを

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=(\sqrt{q},-\sqrt{q},q,-q),\tag{6.57}$$

のように取って得られる．これら 2 つのパラメタの取り方，(6.54), (6.57) に対して，AW の基底状態固有関数 $\phi_0(x)$ の具体形 (6.32) に現れるずらした q-階乗関数の無限積 $(a;q)_\infty$ の積が初等関数になることおよび $\phi_0(x)\propto 1$, $\phi_0^{(1)}(x)\propto\sin x$ となるのを確認できる．また，

$${}_4\phi_3\Bigl(\begin{matrix}q^{-n},\,q^{n+2},\sqrt{q}\,e^{ix},\,\sqrt{q}\,e^{-ix}\\-q,\,q^{3/2},\,-q^{3/2}\end{matrix}\Bigm|q\,;q\Bigr)\propto\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\quad n=0,1,\ldots,\tag{6.58}$$

を確かめるのは面白い．(6.55) および (6.58) を確かめることを，練習問題としよう．

6.4 クラムの定理の拡張：離散量子力学

クラムの定理は，元々のハミルトニアン $\mathcal{H}$ と固有関数系 $\{\phi_n(x)\}$ とから，最も低いエネルギー準位を順々に削除していくことによって，本質的に等スペクトルなハミルトン系を与えてゆく処方である．クライン[16]およびアドラー[17]による oQM の時と同様に，クラムの定理の拡張は，相異なる非負の整数の集合 $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{d_1, d_2, \ldots, d_M\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^M$ によって指定された有限個の固有状態を削除することで得られる．一連の削除の後の新しい基底状態は，削除されずに残ったもののうちの最低エネルギーのもので，準位は前に与えた $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n \,|\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \backslash \mathcal{D}\}$ (1.38) になる．idQM の場合の新しい本質的に等スペクトルなハミルトン系は

$$
\begin{aligned}
\bar{V}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V(x - i\tfrac{M}{2}\gamma)V^*(x - i\tfrac{M+2}{2}\gamma)} \\
&\quad \times \frac{\mathrm{W}_\gamma[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x + i\frac{\gamma}{2})}{\mathrm{W}_\gamma[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x - i\frac{\gamma}{2})} \frac{\mathrm{W}_\gamma[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_\mu](x - i\gamma)}{\mathrm{W}_\gamma[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_\mu](x)}, \qquad (6.59) \\
\bar{\mathcal{A}} &\stackrel{\text{def}}{=} i\Big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\bar{V}^*(x)} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\bar{V}(x)}\Big), \\
\bar{\mathcal{A}}^\dagger &= -i\Big(\sqrt{\bar{V}(x)}\, e^{\frac{\gamma}{2}p} - \sqrt{\bar{V}^*(x)}\, e^{-\frac{\gamma}{2}p}\Big), \\
F(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{\prod_{j=0}^{M-1} V(x + i\frac{M-2j}{2}\gamma)V^*(x - i\frac{M-2j}{2}\gamma)}}{\mathrm{W}_\gamma[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x - i\frac{\gamma}{2})\, \mathrm{W}_\gamma[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x + i\frac{\gamma}{2})}, \\
\bar{\phi}_n(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{F(x)}\, \mathrm{W}_\gamma[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_n](x), \qquad (6.60)
\end{aligned}
$$

で与えられる．rdQM では，

$$
\begin{aligned}
\bar{B}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B(x+M)D(x+M+1)}\, \frac{\mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x)}{\mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x+1)} \\
&\qquad \times \frac{\mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_\mu](x+1)}{\mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_\mu](x)}, \qquad (6.61) \\
\bar{D}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B(x-1)D(x)}\, \frac{\mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x+1)}{\mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x)} \\
&\qquad \times \frac{\mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_\mu](x-1)}{\mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_\mu](x)}, \qquad (6.62) \\
\bar{\mathcal{A}} &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\bar{B}(x)} - e^{\partial}\sqrt{\bar{D}(x)}, \quad \bar{\mathcal{A}}^\dagger = \sqrt{\bar{B}(x)} - \sqrt{\bar{D}(x)}\, e^{-\partial}, \\
F(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{M} B(x+k-1)D(x+k)}}{\mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x)\, \mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}](x+1)}, \\
\bar{\phi}_n(x) &\stackrel{\text{def}}{=} (-1)^M \sqrt{F(x)}\, \mathrm{W}_C[\phi_{d_1}, \ldots, \phi_{d_M}, \phi_n](x), \qquad (6.63)
\end{aligned}
$$

となる．変換後の固有関数 $\{\bar{\phi}_n\}$ の内積 $(\bar{\phi}_n, \bar{\phi}_m)$ の公式は，oQM の場合

(1.44) と全く同じである．

oQM の場合と本質的に異なるのは，削除される固有状態を指定する非負の整数の組 $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{d_1, d_2, \ldots, d_M\}$ の満たすべき条件 $\prod_{j=1}^{M}(m-d_j) \geq 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (1.45) が必要条件であるが，十分条件ではないことである．つまり，ハミルトニアンの非特異性を保証する証明が無い．

6.5　ダルブー変換：虚離散量子力学

1.5 節で示したように，ダルブー変換はハミルトニアン $\mathcal{H}$ の種解 $\mathcal{H}\varphi_j = \tilde{\mathcal{E}}_j\varphi_j$, $j = 1, \ldots, M$ を用いて，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ とその解 ψ, $\mathcal{H}\psi = \mathcal{E}\psi$ を等スペクトル変形

$$\mathcal{H} \to \mathcal{H}^{(M)}, \quad \psi \to \psi^{(M)}, \quad \mathcal{H}^{(M)}\psi^{(M)} = \mathcal{E}\psi^{(M)},$$

する代数的操作である．得られたハミルトニアン $\mathcal{H}^{(M)}$ が非特異性条件を満たすかどうか，解 $\psi^{(M)}$ が 2 乗可積分かどうかは，個々の場合に確認する必要がある．

有限 N の rdQM では，固有ベクトル以外の種解は存在し得ないので，ここで述べるようなダルブー変換は存在しない．本節では，idQM のダルブー変換のみを述べる．

1.5 節の内容を要約すると，(i) 元のハミルトニアンを種解 φ_1 を使って $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{A}}_1^{\dagger}\hat{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_1$ と書き直す．(ii) 新しい等スペクトルハミルトニアンを $\mathcal{H}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_1\hat{\mathcal{A}}_1^{\dagger} + \tilde{\mathcal{E}}_1$ と定義する．その固有関数は $\phi_{1\,n} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_1\phi_n$ になり，種解は $\varphi_{1\,\mathrm{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_1\varphi_{\mathrm{v}}$ ($\mathrm{v} \in \{2, \ldots, M\}$) になる．$\mathcal{H}_1\phi_{1\,n}(x) = \mathcal{E}(n)\phi_{1\,n}(x)$, $\mathcal{H}_1\varphi_{1\,\mathrm{v}}(x) = \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}\varphi_{1\,\mathrm{v}}(x)$. (iii) ハミルトニアン $\mathcal{H}_1$ を種解 $\varphi_{1\,2}$ を使って $\mathcal{H}_1 = \hat{\mathcal{A}}_{1\,2}^{\dagger}\hat{\mathcal{A}}_{1\,2} + \tilde{\mathcal{E}}_2$ と書き直す．(iv) 次の等スペクトルハミルトニアンを $\mathcal{H}_{1\,2} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{1\,2}\hat{\mathcal{A}}_{1\,2}^{\dagger} + \tilde{\mathcal{E}}_2$ で定義する．その固有関数は $\phi_{1\,2n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{1\,2}\phi_{1\,n}(x)$ になり，種解は $\varphi_{1\,2\mathrm{v}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{1\,2}\varphi_{1\,\mathrm{v}}(x)$, $\mathcal{H}_{1\,2}\phi_{1\,2\,n}(x) = \mathcal{E}(n)\phi_{1\,2\,n}(x)$, $\mathcal{H}_{1\,2}\varphi_{1\,2\,\mathrm{v}}(x) = \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}\varphi_{1\,2\mathrm{v}}(x)$. (v) この過程を繰り返して等スペクトルハミルトニアン $\mathcal{H}_{1\ldots s}$ およびその固有関数 $\phi_{1\ldots s\,n}(x)$ と種解 $\tilde{\phi}_{d_1\ldots d_s\,\mathrm{v}}(x)$ を得る．(vi) 最終段階のハミルトニアン $\mathcal{H}_{1\,2\ldots,M}$ は，標準的な形 $\mathcal{H}^{(M)} \equiv \mathcal{H}_{1\,2\ldots,M} = \mathcal{A}^{(M)\dagger}\mathcal{A}^{(M)}$ に書き直せる．もしこれが非特異ならば，等スペクトル的に変形された系を得ることになる[47], [59]．

idQM においては，種解はすべて‘実’ $\varphi_j^* = \varphi_j$ に取る．$\mathcal{A} \to \hat{\mathcal{A}}_1$ つまり，$V(x) \to \hat{V}_1(x)$ および各段階での移行 $\hat{\mathcal{A}}_{1\ldots,s-1} \to \hat{\mathcal{A}}_{1\ldots,s}$, $\hat{V}_{1\ldots,s-1}(x) \to \hat{V}_{1\ldots,s}(x)$ は，次のように与えられる．第 1 段階は

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{A}}_1^{\dagger}\hat{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_1, \quad \hat{\mathcal{A}}_1\varphi_1 = 0,$$

$$\hat{\mathcal{A}}_1 \stackrel{\text{def}}{=} i\big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\hat{V}_1^*(x)} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\hat{V}_1(x)}\,\big),$$

$$\hat{\mathcal{A}}_1^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} -i\big(\sqrt{\hat{V}_1(x)}\,e^{\frac{\gamma}{2}p} - \sqrt{\hat{V}_1^*(x)}\,e^{-\frac{\gamma}{2}p}\big),$$
$$\hat{V}_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V(x)V^*(x-i\gamma)}\,\frac{\varphi_1(x-i\gamma)}{\varphi_1(x)}.$$

第 s 段階の諸量は

$$\mathcal{H}_{1\dots s} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{1\dots s}\hat{\mathcal{A}}_{1\dots s}^\dagger + \tilde{\mathcal{E}}_s, \tag{6.64}$$
$$\hat{\mathcal{A}}_{1\dots s} \stackrel{\text{def}}{=} i\big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\hat{V}_{1\dots s}^*(x)} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\hat{V}_{d_1\dots d_s}(x)}\,\big),$$
$$\hat{\mathcal{A}}_{1\dots s}^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} -i\big(\sqrt{\hat{V}_{1\dots s}(x)}\,e^{\frac{\gamma}{2}p} - \sqrt{\hat{V}_{1\dots s}^*(x)}\,e^{-\frac{\gamma}{2}p}\big),$$
$$\hat{V}_{1\dots s}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V(x-i\tfrac{s-1}{2}\gamma)V^*(x-i\tfrac{s+1}{2}\gamma)}$$
$$\times\frac{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_{s-1}](x+i\frac{\gamma}{2})}{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_{s-1}](x-i\frac{\gamma}{2})}\,\frac{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s](x-i\gamma)}{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s](x)}, \tag{6.65}$$
$$\phi_{1\dots s\,n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{1\dots s}\phi_{1\dots s-1\,n}(x)\quad (n=0,1,2,\dots),$$
$$\varphi_{1\dots s\,\mathrm{v}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{1\dots s}\varphi_{1\dots s-1\,\mathrm{v}}(x)\ (\mathrm{v}\in\{s+1,\dots,M\}), \tag{6.66}$$
$$\mathcal{H}_{1\dots s}\phi_{1\dots s\,n}(x) = \mathcal{E}(n)\phi_{1\dots s\,n}(x)\quad (n=0,1,2,\dots),$$
$$\mathcal{H}_{1\dots s}\varphi_{1\dots s\,\mathrm{v}}(x) = \tilde{\mathcal{E}}_\mathrm{v}\varphi_{1\dots s\,\mathrm{v}}(x), \tag{6.67}$$
$$(\phi_{1\dots s\,n},\phi_{1\dots s\,m}) = \prod_{j=1}^{s}(\mathcal{E}(n)-\tilde{\mathcal{E}}_j)\cdot h_n\delta_{nm}\quad (n,m=0,1,2,\dots). \tag{6.68}$$

すべての段階で固有関数と種解は‘実’である，$\phi_{1\dots s\,n}^*(x) = \phi_{1\dots s\,n}(x)$, $\varphi_{1\dots s\,\mathrm{v}}^*(x) = \varphi_{1\dots s\,\mathrm{v}}(x)$. これらは，カソラティアンで簡潔に表示できる:

$$\phi_{1\dots s\,n}(x) = A(x)\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s,\phi_n](x), \tag{6.69}$$
$$\varphi_{1\dots s\,\mathrm{v}}(x) = A(x)\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s,\varphi_\mathrm{v}](x), \tag{6.70}$$
$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\sqrt{\prod_{j=0}^{s-1}V(x+i(\frac{s}{2}-j)\gamma)V^*(x-i(\frac{s}{2}-j)\gamma)}}{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s](x-i\frac{\gamma}{2})\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s](x+i\frac{\gamma}{2})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(6.69)–(6.70) を示すには，(6.50) が役に立つ．(6.67) を書き下し，それを $\phi_{1\dots s\,n}(x)$ あるいは $\varphi_{1\dots s\,\mathrm{v}}(x)$ で割って (6.70) を使うと，

$$\hat{V}_{1\dots s}(x+i\tfrac{\gamma}{2}) + \hat{V}_{1\dots s}^*(x-i\tfrac{\gamma}{2}) - \tilde{\mathcal{E}}_s + \mathcal{E}(n) \tag{6.71}$$
$$= \sqrt{V(x-i\tfrac{s}{2}\gamma)V^*(x-i\tfrac{s+2}{2}\gamma)}$$
$$\times\frac{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s](x+i\frac{\gamma}{2})}{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s](x-i\frac{\gamma}{2})}\,\frac{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s,\phi_n](x-i\gamma)}{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s,\phi_n](x)}$$
$$+\sqrt{V^*(x+i\tfrac{s}{2}\gamma)V(x+i\tfrac{s+2}{2}\gamma)}$$
$$\times\frac{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s](x-i\frac{\gamma}{2})}{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s](x+i\frac{\gamma}{2})}\,\frac{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s,\phi_n](x+i\gamma)}{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\dots,\varphi_s,\phi_n](x)},$$

および，対応する種解の表式 (6.70) が得られる．

M 個の種解を用いてダルブー変換をして得られたハミルトニアン $\mathcal{H}^{(M)}$ は標準的な形に書き直される:

$$\mathcal{H}^{(M)} = \mathcal{A}^{(M)\dagger}\mathcal{A}^{(M)}, \tag{6.72}$$

$$\mathcal{A}^{(M)} \stackrel{\text{def}}{=} i\big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V^{(M)*}(x)} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V^{(M)}(x)}\big),$$

$$\mathcal{A}^{(M)\dagger} \stackrel{\text{def}}{=} -i\big(\sqrt{V^{(M)}(x)}\,e^{\frac{\gamma}{2}p} - \sqrt{V^{(M)*}(x)}\,e^{-\frac{\gamma}{2}p}\big), \tag{6.73}$$

$$V^{(M)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V(x-i\tfrac{M}{2}\gamma)V^*(x-i\tfrac{M+2}{2}\gamma)} \times \frac{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\ldots,\varphi_M](x+i\frac{\gamma}{2})}{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\ldots,\varphi_M](x-i\frac{\gamma}{2})}\,\frac{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\ldots,\varphi_M,\phi_0](x-i\gamma)}{\mathrm{W}_\gamma[\varphi_1,\ldots,\varphi_M,\phi_0](x)}. \tag{6.74}$$

ここで基底状態は $\mathcal{A}^{(M)}$ 演算子のゼロモードになっている，

$$\mathcal{A}^{(M)}\phi_{1\ldots M\,0}(x) = 0.$$

2 つのハミルトニアン (6.72) と (6.64) ($s=M$) の同値性は，

$$V^{(M)}(x)V^{(M)*}(x-i\gamma) = \hat{V}_{1\ldots M}(x-i\tfrac{\gamma}{2})\hat{V}^*_{1\ldots M}(x-i\tfrac{\gamma}{2}), \tag{6.75}$$

$$V^{(M)}(x) + V^{(M)*}(x) = \hat{V}_{1\ldots M}(x+i\tfrac{\gamma}{2}) + \hat{V}^*_{1\ldots M}(x-i\tfrac{\gamma}{2}) - \tilde{\mathcal{E}}_M. \tag{6.76}$$

この最初の式は自明で，2 番目は (6.71) で $n=0$ としたものの帰結である．

s 段階の諸量は，用いた種解の順序には依らないことを強調しておこう．($\phi_{1\ldots s\,n}(x)$ と $\varphi_{1\ldots s\,\mathrm{v}}(x)$ の符号は順序に依存する．)

前節 6.4 節のクラムの定理の拡張で出てくる idQM の表式 (6.59)–(6.60) とダルブー変換の表式 (6.64)–(6.70) とは本質的に同じ代数的構造を持っていることに注意しよう．前者は，固有関数のみを種解として用いたダルブー変換と言うことができる．

第 7 章
離散量子力学での形状不変性

離散量子力学の形状不変性は，ハミルトニアン全体のスケール変換も含める((7.1)) という意味で，通常の量子力学のそれよりも広義のものになっている．シュレーディンガー描像での厳密可解性の十分条件であるという点は変わらず，形状不変性から，離散固有値の全体 (2.2) とそれに対応する固有関数 (2.3) を明示的に計算することができる．

ハミルトニアン全体のスケール変換（κ 倍）を含めるので，通常の量子力学の形状不変性の条件 (2.1) は，以下のように変更される:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger = \kappa\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^\dagger\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) + \mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}), \tag{7.1}$$

ここで，$\boldsymbol{\delta}$ はパラメタのずらしで，κ は実で正のパラメタである．スケール変換は，系のエネルギーも変化させるので，(2.2) は次のように変更される:

$$\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{s=0}^{n-1}\kappa^s\mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}^{[s]}), \qquad \boldsymbol{\lambda}^{[s]} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\lambda}+s\boldsymbol{\delta}. \tag{7.2}$$

固有関数の表式（古典直交多項式の普遍的なロドリーグ公式）(2.3) はそのまま成り立つ．個々の多項式のロドリーグ公式の導出は，前方・後方ずらし関係式を用いて，(2.22) の dQM 対応物を得た後にしよう．

上の形状不変性の条件 (7.1) はポテンシャル関数 $V(x;\boldsymbol{\lambda})$, $V^*(x;\boldsymbol{\lambda})$ および $B(x;\boldsymbol{\lambda})$, $D(x;\boldsymbol{\lambda})$ のパラメタ $\boldsymbol{\lambda}$ 依存性の 2 個の関係式として書き直せる．idQM では

$$V(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})V^*(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}) = \kappa^2\,V(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})V^*(x-i\gamma;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}), \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}V(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}) + V^*(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}) &= \kappa\big(V(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) + V^*(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\big)\\ &\quad -\mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned} \tag{7.4}$$

rdQM では

$$B(x+1;\boldsymbol{\lambda})D(x+1;\boldsymbol{\lambda}) = \kappa^2\,B(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})D(x+1;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}), \tag{7.5}$$

$$B(x;\boldsymbol{\lambda})+D(x+1;\boldsymbol{\lambda})=\kappa\big(B(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})+D(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\big)+\mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}). \quad (7.6)$$

第 6 章で導入した 6 つの完全可解ポテンシャルの例 (6.15)–(6.20) について形状不変性の条件 (7.3)–(7.6) が成り立っていることを見るのはたやすい：

$$\begin{aligned}
\text{idQM}:\ \ \text{MP}:&\quad \boldsymbol{\lambda}=a,\quad \boldsymbol{\delta}=\tfrac12,\quad \kappa=1,\quad \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=2n, && (7.7)\\
\text{W}:&\quad \boldsymbol{\lambda}=(a_1,a_2,a_3,a_4),\quad \boldsymbol{\delta}=(\tfrac12,\tfrac12,\tfrac12,\tfrac12),\quad \kappa=1,\\
&\quad \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=4n(n+b_1-1), && (7.8)\\
\text{AW}:&\quad q^{\boldsymbol{\lambda}}=(a_1,a_2,a_3,a_4),\quad \boldsymbol{\delta}=(\tfrac12,\tfrac12,\tfrac12,\tfrac12),\quad \kappa=q^{-1},\\
&\quad \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=(q^{-n}-1)(1-b_4q^{n-1}), && (7.9)\\
\text{rdQM}:\ \ \text{M}:&\quad \boldsymbol{\lambda}=(\beta,c),\quad \boldsymbol{\delta}=(1,0),\quad \kappa=1,\quad \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=n, && (7.10)\\
\text{R}:&\quad \boldsymbol{\lambda}=(a,b,c,d),\quad \boldsymbol{\delta}=(1,1,1,1),\quad \kappa=1,\\
&\quad \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=4n(n+\tilde{d}), && (7.11)\\
q\text{R}:&\quad q^{\boldsymbol{\lambda}}=(a,b,c,d),\quad \boldsymbol{\delta}=(1,1,1,1),\quad \kappa=q^{-1},\\
&\quad \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=(q^{-n}-1)(1-\tilde{d}q^{n-1}). && (7.12)
\end{aligned}$$

ここで $q^{(\lambda_1,\lambda_2,\dots)}=(q^{\lambda_1},q^{\lambda_2},\dots)$ である．他の形状不変で可解な idQM および rdQM の例に関しては，[29], [30] を参照のこと．いわゆる Askey scheme の超幾何直交多項式がすべて，固有関数の主要部分として登場する．

7.1 前方・後方ずらし演算子

補助関数 $\varphi(x)$, $\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})$

形状不変な dQM 系においては，ポテンシャル関数 $V(x;\boldsymbol{\lambda})$, $V^*(x;\boldsymbol{\lambda})$, $B(x;\boldsymbol{\lambda})$, $D(x;\boldsymbol{\lambda})$ のパラメタのずらし $\boldsymbol{\lambda}\to\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}$ と座標のずらしとは密接に関係しているが，そうでない部分も存在する．後者は，$\eta(x)\neq x$ の場合に起こり，典型的には，W, AW, R qR 等のポテンシャルの分母に由来する．この構造は，可解 dQM 系の統一理論から自然に理解できる (8.4 節参照)．正弦的座標に依存する補助関数 $\varphi(x)$, $\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})$ を導入して

$$\text{idQM:}\quad \varphi(x)\stackrel{\text{def}}{=}\left\{\begin{array}{c}1\\ 2x\\ 2\sin x\end{array}\right\},\quad \eta(x)=\left\{\begin{array}{c}x\\ x^2\\ \cos x\end{array}\right\}, \qquad (7.13)$$

$$\text{rdQM:}\quad \varphi(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\eta(x+1;\boldsymbol{\lambda})-\eta(x;\boldsymbol{\lambda})}{\eta(1;\boldsymbol{\lambda})},\quad \varphi(0;\boldsymbol{\lambda})=1, \qquad (7.14)$$

ポテンシャル関数の $\boldsymbol{\lambda}$ と $\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}$ のものとを関係付けることができる:

$$\text{idQM:}\quad V(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})=\kappa^{-1}\frac{\varphi(x-i\gamma)}{\varphi(x)}V(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}), \qquad (7.15)$$

$$\text{rdQM:}\quad B(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})=\kappa^{-1}\frac{\varphi(x+1;\boldsymbol{\lambda})}{\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})}B(x+1;\boldsymbol{\lambda}),\tag{7.16}$$

$$D(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})=\kappa^{-1}\frac{\varphi(x-1;\boldsymbol{\lambda})}{\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})}D(x;\boldsymbol{\lambda}).\tag{7.17}$$

また $\varphi(x)$, $\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})$ を通じて，基底状態固有関数 $\phi_0(x)$ の $\boldsymbol{\lambda}$ と $\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}$ のものとが関係付けられる:

$$\text{idQM:}\quad \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})=\varphi(x)\sqrt{V(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}\,\phi_0(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}),\tag{7.18}$$

$$\text{rdQM:}\quad \sqrt{B(0\,;\boldsymbol{\lambda})}\phi_0(x\,;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})=\varphi(x\,;\boldsymbol{\lambda})\sqrt{B(x\,;\boldsymbol{\lambda})}\phi_0(x\,;\boldsymbol{\lambda}),\tag{7.19}$$

$$\sqrt{B(0\,;\boldsymbol{\lambda})}\phi_0(x\,;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})=\varphi(x\,;\boldsymbol{\lambda})\sqrt{D(x+1\,;\boldsymbol{\lambda})}\phi_0(x+1\,;\boldsymbol{\lambda}).\tag{7.20}$$

これらは，後に前方・後方ずらし演算子 (7.22)–(7.23) を導入する際に役に立つ．

oQM と同様に形状不変性とクラムの定理から，$\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ と $\phi_{n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$ は $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ によって結び付けられている（(2.8), (2.9)）:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})=f_n(\boldsymbol{\lambda})\phi_{n-1}\bigl(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}\bigr)\times\begin{cases}1 & :\text{idQM}\\ 1/\sqrt{B(0;\boldsymbol{\lambda})} & :\text{rdQM}\end{cases},$$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\phi_{n-1}\bigl(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}\bigr)=b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})\times\begin{cases}1 & :\ \text{idQM}\\ \sqrt{B(0;\boldsymbol{\lambda})} & :\text{rdQM}\end{cases}.$$

rdQM での因子 $\sqrt{B(0;\boldsymbol{\lambda})}$ は，後の便宜のために導入した．(7.23) とその後の ($\star$) 参照．$\phi_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ と $P_n(\eta(x;\boldsymbol{\lambda});\boldsymbol{\lambda})$ の定義から，$f_n(\boldsymbol{\lambda})$ および $b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})$ が決まる．その積は常に固有値 $\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})$ である（(2.10)）．idQM では

$$\{f_n(\boldsymbol{\lambda}),\ b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})\}=\left\{\begin{array}{cl}2, & n\ :\text{MP}\\ -n(n+b_1-1), & -1\ :\text{W}\\ q^{\frac{n}{2}}(q^{-n}-1)(1-b_4q^{n-1}), & q^{-\frac{n}{2}}:\text{AW}\end{array}\right\}.$$

rdQM ではすべてに

$$f_n(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}),\quad b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})=1.\tag{7.21}$$

多項式固有関数に関する前方・後方ずらし演算子 $\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda})$, $\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})$[29], [30] は

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^{-1}\circ\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\circ\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})\times\begin{cases}1 & :\text{idQM}\\ \sqrt{B(0;\boldsymbol{\lambda})} & :\text{rdQM}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}i\varphi(x)^{-1}(e^{\frac{\gamma}{2}p}-e^{-\frac{\gamma}{2}p}) & :\text{idQM}\\ B(0;\boldsymbol{\lambda})\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}(1-e^{\partial}) & :\text{rdQM}\end{cases},\tag{7.22}$$

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\circ\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\circ\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\times\begin{cases}1 & :\text{idQM}\\ \frac{1}{\sqrt{B(0;\boldsymbol{\lambda})}} & :\text{rdQM}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} -i\big(V(x;\boldsymbol{\lambda})e^{\frac{\gamma}{2}p} - V^*(x;\boldsymbol{\lambda})e^{-\frac{\gamma}{2}p}\big)\varphi(x) & : \text{idQM} \\ \frac{1}{B(0;\boldsymbol{\lambda})}\big(B(x;\boldsymbol{\lambda}) - D(x;\boldsymbol{\lambda})e^{-\partial}\big)\varphi(x;\boldsymbol{\lambda}) & : \text{rdQM} \end{cases}. \quad (7.23)$$

これらによって，固有多項式間の前方ずらし関係式 $\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_n(x;\boldsymbol{\lambda}) = f_n(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$ (2.19) および後方ずらし関係式

$$(\star) \qquad \mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_n(x;\boldsymbol{\lambda}), \qquad (2.20)$$

が得られる．補助関数 $\varphi(x)$, $\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})$ (7.14) の具体形は

$$\text{idQM} : \varphi(x) = \begin{cases} 1 & : \text{MP} \\ 2x & : \text{W} \\ 2\sin x & : \text{AW} \end{cases}, \quad \text{rdQM} : \varphi(x;\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} 1 & : \text{M} \\ \dfrac{2x+d+1}{d+1} & : \text{R} \\ \dfrac{q^{-x} - dq^{x+1}}{1-dq} & : q\text{R} \end{cases}$$

である．

rdQM について，上の $(\star)$ で，$x=0$ とおくと，$D(0;\boldsymbol{\lambda})=0$ (6.6), $b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})=1$ (7.21), $\eta(0;\boldsymbol{\lambda}) = 0$ (6.10), $P_n(0;\boldsymbol{\lambda}) = 1$ (6.11) 等と，$\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})$ の定義式 (7.23) の分母の $B(0;\boldsymbol{\lambda})$ によって，自明に成り立っていることが判る．

普遍的ロドリーグ公式

前方ずらし演算子 (7.22) のエルミート共役を取って

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger \propto \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) \circ \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}),$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} -i(e^{\frac{\gamma}{2}p} - e^{-\frac{\gamma}{2}p})\varphi(x)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D} & : \text{idQM} \\ (1-e^{-\partial})\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}(\boldsymbol{\lambda}) & : \text{rdQM} \end{cases}.$$

これより，多項式固有関数のロドリーグ公式 (2.3) が次のように，重み関数に差分演算子が作用するという統一的な形に書ける．idQM では，

$$P_n(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}) = r_n\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})^{-2} \circ \mathcal{D}^n \circ \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+n\boldsymbol{\delta})^2, \qquad (7.24)$$

$$r_n = 1/n! \ : \text{M-P}, \quad r_n = (-1)^n : \text{W}, \quad r_n = 1 : \text{AW}. \qquad (7.25)$$

rdQM では，M, R, qR すべてに，

$$P_n(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}) = \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})^{-2} \circ \prod_{j=0}^{n-1} \mathcal{D}(\boldsymbol{\lambda}+j\boldsymbol{\delta}) \circ \phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+n\boldsymbol{\delta})^2, \qquad (7.26)$$

が成り立つ．これらの公式は，今までに知られているもの[6]より簡潔で，構造をはっきり表している．

Charlier 多項式は，rdQM の最も簡単な例であり，ずらすパラメタがない．その形状不変関係式 $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger - \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = 1$ は，振動子代数の差分演算子による表現になっている．同様に idQM の最も簡単な例である q-Hermite 多項式も，q 以外のずらすパラメタがない．その形状不変関係式 $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger - q^{-1}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = q^{-1} - 1$ は，q-振動子代数の表現になっている[61]．

7.2 クラムの定理の拡張：特別な場合，純虚数ずらし

この節では，クラムの定理の拡張の特別な場合，つまり連続した ℓ 個の整数 $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{1,2,\ldots,\ell\}$ で指定される固有状態を削除する場合を具体的に扱う．これは，1.4.1 節の離散版である．形状不変な具体例を扱うので，第 7 章の中で論じることとした．6.4 節で導入した公式の多くが，非常に簡単な形を取る．ℓ が偶数の時のみ，ハミルトニアンは非特異であるが，多くの代数的公式は ℓ の偶奇に依らず成り立つ．基底状態は元のままで，$\mu = 0$ である（(1.38)）．変形された系のポテンシャル関数，ハミルトニアン，シュレーディンガー方程式は

$$V_\ell(x;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi(x-i\frac{\ell+1}{2}\gamma)\varphi(x-i\frac{\ell}{2}\gamma)}{\varphi(x)\varphi(x-i\frac{\gamma}{2})}\frac{\xi_\ell(\eta(x+i\frac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})}{\xi_\ell(\eta(x-i\frac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})}V(x-i\tfrac{\ell}{2}\gamma;\boldsymbol{\lambda}) \tag{7.27}$$

$$= \kappa^\ell \frac{\xi_\ell(\eta(x+i\frac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})}{\xi_\ell(\eta(x-i\frac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})}V(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta}), \tag{7.28}$$

$$\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} i\big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V_\ell^*(x;\boldsymbol{\lambda})} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})}\,\big),$$

$$\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} -i\big(\sqrt{V_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})}\,e^{\frac{\gamma}{2}p} - \sqrt{V_\ell^*(x;\boldsymbol{\lambda})}\,e^{-\frac{\gamma}{2}p}\big), \tag{7.29}$$

$$\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger \mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda}), \tag{7.30}$$

$$\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) \quad (n=0,\ell+1,\ell+2,\ldots). \tag{7.31}$$

変形多項式 $\xi_\ell(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ の具体形は (7.33) に与える．偶数の ℓ では，$\xi_\ell(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})$ は複素 x 平面の矩形領域 D_γ (6.41), $x_1 \le \mathrm{Re}\,x \le x_2$, $|\mathrm{Im}\,x| \le \frac{1}{2}|\gamma|$ で零点を持たない．この系は形状不変でない．表式 $V_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})$ の第 2 行目 (7.28) は，第 1 行目 (7.27) から補助関数 φ の性質 (7.15) を繰り返し使って得られる．この形の変形ポテンシャルは，多添え字（例外）Wilson および Askey-Wilson 多項式のものと密接に関係している（9.1 節参照）．

新しい補助関数 $\varphi_\ell(x)$

$$\varphi_\ell(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x)^{[\frac{\ell}{2}]}\prod_{k=1}^{\ell-2}\big(\varphi(x-i\tfrac{k}{2}\gamma)\varphi(x+i\tfrac{k}{2}\gamma)\big)^{[\frac{\ell-k}{2}]}, \tag{7.32}$$

を使うと便利である．ここで $[x]$ は x 以下の最大の整数である．$[\frac{\ell}{2}] + 2\sum_{k=1}^{\ell-2}[\frac{\ell-k}{2}] = \frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ に注意しよう．変形多項式 $\xi_\ell(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ の定義は

$$\mathrm{W}_\gamma[\check{P}_1,\ldots,\check{P}_\ell](x;\boldsymbol{\lambda}) \qquad \big(\check{P}_n(x;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} P_n(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})\big)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{\ell} c_k(\boldsymbol{\lambda})\cdot\varphi_\ell(x)\xi_\ell(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}) \times \begin{cases} \prod_{k=1}^{\ell} k! & :\mathrm{MP},\mathrm{W} \\ \prod_{k=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{k}\sinh\frac{-j\gamma}{2} & :\mathrm{AW} \end{cases}.$$

oQM の場合 (1.46) と同様に，元の系の多項式 P_ℓ のパラメタをずらしたものになっている:

$$\xi_\ell(\eta;\boldsymbol{\lambda})=\frac{P_\ell(\eta;-\boldsymbol{\lambda}^*-(\ell-1)\boldsymbol{\delta})}{c_\ell(-\boldsymbol{\lambda}^*-(\ell-1)\boldsymbol{\delta})}\times\begin{cases}(\ell!)^{-1} & :\text{MP, W}\\ (\prod_{j=1}^{\ell}\sinh\frac{-j\gamma}{2})^{-1} & :\text{AW}\end{cases}. \tag{7.33}$$

ここで，$c_n(\boldsymbol{\lambda})$ は $P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ の最高次 (η^n) の係数で，

$$c_n(\boldsymbol{\lambda})=2^n/n!,\ \text{MP};\quad (-1)^n(n+b_1-1)_n,\ \text{W};\quad 2^n(b_4q^{n-1};q)_n,\ \text{AW}.$$

MP, W および AW の各々について，$P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda}^*)=P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})$, $c_n(\boldsymbol{\lambda}^*)=c_n(\boldsymbol{\lambda})$ が成り立つ．固有関数は

$$\begin{aligned}
&\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\frac{(-1)^\ell\kappa^{\frac14\ell(\ell-1)}\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})}{\sqrt{\xi_\ell(\eta(x-i\frac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})\xi_\ell(\eta(x+i\frac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})}},\\
&\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})P_{\ell,n}\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\big),\\
&\mathrm{W}_\gamma[\check{P}_1,\ldots,\check{P}_\ell,\check{P}_n](x;\boldsymbol{\lambda})\\
&\quad\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{k=1}^{\ell}c_k(\boldsymbol{\lambda})\cdot\varphi_{\ell+1}(x)(-1)^\ell P_{\ell,n}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})\\
&\quad\times\begin{cases}\prod_{k=1}^{\ell}k! & :\text{MP, W}\\ \prod_{k=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{k}\sinh\frac{-j\gamma}{2} & :\text{AW}\end{cases}\quad\big(\Rightarrow P_{\ell,0}(\eta;\boldsymbol{\lambda})=1\big),
\end{aligned}$$

である．ここで，$P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ は，η の n 次の多項式で，$P_{0,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})=P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ である．$1\le n\le\ell$ については，$P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})=0$ で，$n<0$ に対しては，$P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})=0$ とする．偶数の ℓ の時，固有多項式 $P_{\ell,n}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})$ $(n\ge\ell+1)$ は，x の直交域内に $n-\ell$ 個の零点を持つ．演算子 $\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ (7.29) とが，変形された系 $\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ を，パラメタ $\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}$ を持つ形状不変な系 $\mathcal{H}'_\ell(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ と結び付ける．変形された系 $\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ の n 番目 $(n\ge\ell+1)$ の準位は，新しい形状不変な系 $\mathcal{H}'_\ell$ の $n-\ell-1$ 番目の準位と等スペクトルである:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=f_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{n-\ell-1}\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big),\\
&\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\phi_{n-\ell-1}\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big)=b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}).
\end{aligned}$$

ここで $f_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})$ と $b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda})$ は，エネルギー固有値の因子で $\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=f_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda})$, 以下のように定義される:

$$\begin{aligned}
f_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})&\stackrel{\text{def}}{=}f_n(\boldsymbol{\lambda})\times A,\\
b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda})&\stackrel{\text{def}}{=}b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})\times A^{-1},
\end{aligned}\qquad A=\begin{cases}2^\ell & :\text{MP}\\ (-1)^\ell(n-\ell)_\ell(b_1+n)_\ell & :\text{W}\\ q^{-\frac12\ell n}(q^{n-\ell};q)_\ell(b_4q^n;q)_\ell & :\text{AW}\end{cases}.$$

多項式固有関数に働く前方・後方ずらし演算子 $\mathcal{F}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ の定義は

$$\mathcal{F}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\phi_0\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big)^{-1}\circ\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\circ\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^\ell \kappa^{\frac14 \ell(\ell+1)}}{\varphi(x)\xi_\ell(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})} i\big(e^{\frac{\gamma}{2}p} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\big),\\
\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1} \circ \mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger \circ \phi_0\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big)\\
&= (-1)^\ell \kappa^{-\frac14 \ell(\ell-3)}(-i)\Big(V(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\xi_\ell(\eta(x+i\tfrac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})e^{\frac{\gamma}{2}p}\\
&\qquad - V^*(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\xi_\ell(\eta(x-i\tfrac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})e^{-\frac{\gamma}{2}p}\Big)\varphi(x).
\end{aligned}
$$

多項式への作用は

$$
\mathcal{F}_\ell(\boldsymbol{\lambda})P_{\ell,n}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}) = f_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})P_{n-\ell-1}\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big), \tag{7.34}
$$

$$
\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda})P_{n-\ell-1}\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big) = b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda})P_{\ell,n}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}). \tag{7.35}
$$

$n \geq \ell+1$ では，上の公式 (7.35) が変形された固有多項式 $P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ を $\xi_\ell(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ と元々の固有多項式 $P_n(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ で表す:

$$
\begin{aligned}
&(-1)^\ell \kappa^{\frac14 \ell(\ell-3)} b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda})P_{\ell,n}(\eta;\boldsymbol{\lambda})\\
&= -i\Big(V(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\xi_\ell(\eta(x+i\tfrac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})\\
&\qquad\qquad \times \varphi(x-i\tfrac{\gamma}{2})P_{n-\ell-1}(\eta(x-i\tfrac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta})\\
&\quad - V^*(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\xi_\ell(\eta(x-i\tfrac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda})\\
&\qquad\qquad \times \varphi(x+i\tfrac{\gamma}{2})P_{n-\ell-1}(\eta(x+i\tfrac{\gamma}{2});\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta})\Big).
\end{aligned}
$$

偶数の ℓ の場合の直交関係式は $(n=0,\ n\geq \ell+1)$,

$$
\int_{x_1}^{x_2} \phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})^2\, P_{\ell,n}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})P_{\ell,m}(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})dx = h_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})\delta_{nm},
$$

$$
h_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} h_n(\boldsymbol{\lambda}) \times \begin{cases} (n-\ell)_\ell 2^\ell & :\mathrm{MP}\\ (n-\ell)_\ell(b_1+n)_\ell & :\mathrm{W}\\ q^{-\ell n}(q^{n-\ell};q)_\ell(b_4q^n;q)_\ell & :\mathrm{AW} \end{cases}.
$$

この節の色々な公式は，後（第 9 章）に導入する新しい直交多項式のものと非常に類似していることに注意しよう．

7.3 クラムの定理の拡張：特別な場合，実数ずらし

前節に続いて，連続した ℓ 個の整数 $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{1,2,\ldots,\ell\}$ で指定される固有状態を削除する場合を扱う[60]．実数ずらしなので，有限な $x_{\max}$ の場合は，固有状態を 1 個削除するごとに，ハミルトニアンの行列の大きさが 1 だけ減少する．ℓ が偶数の時のみ，ハミルトニアンは非特異であるが，多くの代数的公式は ℓ の偶奇に依らず成り立つ．基底状態は元のままで，$\mu=0$ である ((1.38))．

まず，多項式のカソラティアンに関する補助定理から始めよう．実数ずらしの理論では，正弦的座標 $\eta(x;\boldsymbol{\lambda})$ は，パラメタに依存し，またそれが補助関数

$\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})$ (7.14) と関係している:

$$\frac{\eta(x+\alpha;\boldsymbol{\lambda})-\eta(x;\boldsymbol{\lambda})}{\eta(\alpha;\boldsymbol{\lambda})}=\varphi(x;\boldsymbol{\lambda}+(\alpha-1)\boldsymbol{\delta}). \tag{7.36}$$

補助関数を更に拡張して ℓ 番目の補助関数 $\varphi_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})$ を導入しよう:

$$\begin{aligned}\varphi_\ell(x;\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{1\le j<k\le \ell}\frac{\eta(x+k-1;\boldsymbol{\lambda})-\eta(x+j-1;\boldsymbol{\lambda})}{\eta(k-j;\boldsymbol{\lambda})}\\ &= \prod_{1\le j<k\le \ell}\varphi(x+j;\boldsymbol{\lambda}+(k-j-1)\boldsymbol{\delta}).\end{aligned} \tag{7.37}$$

$\varphi_0(x;\boldsymbol{\lambda})=1=\varphi_1(x;\boldsymbol{\lambda})$, および $\varphi_2(x;\boldsymbol{\lambda})\equiv\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})$ である．これを用いると，多項式のカソラティアン $\mathrm{W}_C[\check{P}_{n_1},\ldots,\check{P}_{n_m}](x;\boldsymbol{\lambda})$ から，多項式 $\check{P}_{(n_1,\ldots,n_m)}(x;\boldsymbol{\lambda})$ を定義することができる:

$$\begin{aligned}&\varphi_m(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\,\mathrm{W}_C[\check{P}_{n_1},\ldots,\check{P}_{n_m}](x;\boldsymbol{\lambda})\\ &=(-1)^{\binom{m}{2}}\kappa^{-\binom{m}{3}}\prod_{1\le j<k\le m}\frac{\mathcal{E}(n_k;\boldsymbol{\lambda})-\mathcal{E}(n_j;\boldsymbol{\lambda})}{B(0;\boldsymbol{\lambda}+(j-1)\boldsymbol{\delta})}\cdot\check{P}_{(n_1,\ldots,n_m)}(x;\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned} \tag{7.38}$$

ここで，$\binom{m}{k}$ は，二項係数である．この公式は，[29] で論じたすべての多項式について成り立つ普遍的なものである．右辺の $\check{P}_{(n_1,\ldots,n_m)}(x;\boldsymbol{\lambda})$ は $\eta(x;\boldsymbol{\lambda}+(m-1)\boldsymbol{\delta})$ の $\sum_{k=1}^m n_k-\frac{1}{2}m(m-1)$ 次の多項式で，正規化条件

$$\check{P}_{(n_1,\ldots,n_m)}(0;\boldsymbol{\lambda})=1,$$

を満たす．

変形された系のポテンシャル関数，ハミルトニアン，シュレーディンガー方程式および固有関数は

$$B_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})=\kappa^\ell B(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\frac{\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})}, \tag{7.39}$$

$$D_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})=\kappa^\ell D(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\frac{\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})}, \tag{7.40}$$

$$\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})=\sqrt{B_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})}-e^{\partial}\sqrt{D_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})},$$

$$\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger=\sqrt{B_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})}-\sqrt{D_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})}\,e^{-\partial},$$

$$\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda}),\quad x^\ell_{\max}\stackrel{\text{def}}{=}N-\ell\ \text{or}\ \infty, \tag{7.41}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})\\ &\qquad\qquad(n=0,\ell+1,\ell+2,\ldots,n_{\max}),\end{aligned} \tag{7.42}$$

$$\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{C(\ell,\boldsymbol{\lambda})}{\sqrt{B(0;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})}}\frac{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})}{\sqrt{\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})}}, \tag{7.43}$$

$$\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})(-1)^\ell\prod_{j=1}^{\ell}\frac{\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})-\mathcal{E}(j;\boldsymbol{\lambda})}{\mathcal{E}(j;\boldsymbol{\lambda})}\cdot\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}). \tag{7.44}$$

ハミルトニアン $\mathcal{H}_\ell$ は $(x^\ell_{\max}+1)\times(x^\ell_{\max}+1)$ 行列である，$\mathcal{H}_\ell=(\mathcal{H}_{\ell;x,y})$ $(x,y=0,1,\ldots,x^\ell_{\max})$．$D_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})$ の解析接続形から境界条件 $D_\ell(0;\boldsymbol{\lambda})=0$ が満たされていることが判る．有限の場合には $B_\ell(x^\ell_{\max})=0$ が成り立つ．変形多項式 $\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})$ は，$\eta(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell-1)\boldsymbol{\delta})$ の ℓ 次の多項式であり，変形された多項式固有関数 $\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}P_{\ell,n}(\eta(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta});\boldsymbol{\lambda})$ $(n=0,\ell+1,\ell+2,\ldots)$ は，$\eta(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})$ の n 次の多項式で，カソラティアンの表式 (7.38) によって

$$\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\check{P}_{(1,2,\ldots,\ell)}(x;\boldsymbol{\lambda}),\quad \check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\check{P}_{(1,2,\ldots,\ell,n)}(x;\boldsymbol{\lambda}),\tag{7.45}$$

で与えられ，正規化条件（初期条件）$\check{\xi}_\ell(0;\boldsymbol{\lambda})=1$, $\check{P}_{\ell,n}(0;\boldsymbol{\lambda})=1$ を満たす．$n=1,\ldots,\ell$ では，変形された多項式固有関数は消えている，$\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=0$．変形多項式 $\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})$ は，元の固有多項式のパラメタひねりなどによっても表される:

$$\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})=\check{P}_\ell(-x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda}+(\ell-1)\boldsymbol{\delta})),\qquad \begin{cases}\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}(-\beta,c), & \text{M}\\ \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}-\boldsymbol{\lambda}, & \text{R}\\ \mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}-\boldsymbol{\lambda}, & q\text{R}\end{cases}.$$

ここで $C(\ell,\boldsymbol{\lambda})$ は次のように定義される:

$$C(\ell,\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{B(0;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})}\,(-1)^\ell\kappa^{-\frac{1}{4}\ell(\ell-1)}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{\mathcal{E}(j;\boldsymbol{\lambda})}{\sqrt{B(0;\boldsymbol{\lambda}+(j-1)\boldsymbol{\delta})}}.$$

ℓ が偶数の時，変形多項式 $\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})=\xi_\ell(\eta(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell-1)\boldsymbol{\delta});\boldsymbol{\lambda})$ は整数格子上 $x=0,1,\ldots,x^\ell_{\max}+1$ で定符号である．それは，区間 $0\le x\le x^\ell_{\max}+1$ に零点を持たないか，零点を持つときは，偶数個の零点が隣り合う整数点の間にある．

また，変形多項式 ξ_ℓ は $P_{\ell,n}$ と

$$\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})=\check{P}_{\ell-1,\ell}(x;\boldsymbol{\lambda}),$$

のように関係付いており，$\xi_{\ell+1}$ とも再帰公式で結ばれている:

$$\begin{aligned}B(0;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{\xi}_{\ell+1}(x;\boldsymbol{\lambda})&=B(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\varphi(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})\\&\quad-D(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\varphi(x-1;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned}$$

ℓ が偶数の時，変形された多項式 $P_{\ell,n}(y;\boldsymbol{\lambda})$ $(n\ge\ell+1)$ は変域 $0\le y\le\eta(x^\ell_{\max};\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})$ 中に $n-\ell$ 個の零点を持つ．これらの事実は，[29] のすべての例について，低い ℓ に関して，数値的に確かめられた．筆者の知る限りでは，一般的な証明は無い．

前節 7.2 節と同様に，演算子 $\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ とが，変形された系 $\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ を形状不変な系 $\mathcal{H}'_\ell(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger=\kappa^{\ell+1}\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta})+\mathcal{E}(\ell+1;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}^{[\ell+1]}(\boldsymbol{\lambda})$ と結び付ける．変形された系 $\mathcal{H}_\ell$ の n 番

目の準位 $(n \geq \ell+1)$ は，新しい形状不変な系 $\mathcal{H}'_\ell$ の $n-\ell-1$ 番目の準位と等スペクトルである:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = f_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{n-\ell-1}\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big),\\
&\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\phi_{n-\ell-1}\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big) = b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}),\\
&f_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} f_n(\boldsymbol{\lambda})\frac{\kappa^{-\frac{\ell}{2}}C(\ell,\boldsymbol{\lambda})}{B(0;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})}, \quad b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})\frac{B(0;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})}{\kappa^{-\frac{\ell}{2}}C(\ell,\boldsymbol{\lambda})}.
\end{aligned}
$$

$n \geq \ell+1$ について，$\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) = \kappa^{\ell+1}\mathcal{E}(n-\ell-1;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}) + \mathcal{E}(\ell+1;\boldsymbol{\lambda})$ となっている．多項式に働く前方・後方ずらし演算子 $\mathcal{F}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$, $\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ と相似変換したハミルトニアン $\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_0\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big)^{-1}\circ\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\circ\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})\\
&= \frac{\kappa^{\frac{\ell}{2}}C(\ell,\boldsymbol{\lambda})}{\varphi(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})}\big(1-e^{\partial}\big), \qquad (7.46)\\
\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\circ\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\circ\phi_0\big(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}\big) \qquad (7.47)\\
&= \frac{\kappa^{\frac{\ell}{2}}}{C(\ell,\boldsymbol{\lambda})}\Big(B(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})\\
&\qquad - D(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})e^{-\partial}\Big)\varphi(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta}),\\
\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\circ\mathcal{H}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\circ\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{F}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \qquad (7.48)\\
&= \kappa^\ell\Big(B(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\frac{\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})}(1-e^{\partial})\\
&\qquad + D(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\frac{\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})}(1-e^{-\partial})\Big).
\end{aligned}
$$

多項式への作用は

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = f_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{n-\ell-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}),\\
&\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{n-\ell-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}) = b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}),\\
&\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) \quad (n=0,\ell+1,\ell+2,\ldots,n_{\max}).
\end{aligned}
$$

$n \geq \ell+1$ では，上の公式 (7.47) が変形された固有多項式 $P_{\ell,n}$ の ξ_ℓ と元々の固有多項式 P_n による表式を与える:

$$
\begin{aligned}
&\kappa^{-\frac{\ell}{2}}C(\ell,\boldsymbol{\lambda})b_{\ell,n-1}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})\\
&= B(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})\varphi(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{P}_{n-\ell-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta})\\
&- D(x;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})\varphi(x-1;\boldsymbol{\lambda}+\ell\boldsymbol{\delta})\check{P}_{n-\ell-1}(x-1;\boldsymbol{\lambda}+(\ell+1)\boldsymbol{\delta}).
\end{aligned}
$$

偶数の ℓ の場合の直交関係式は $(x^\ell_{\max} = N-\ell,\ \infty)$,

$$
\sum_{x=0}^{x^\ell_{\max}}\phi_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})^2\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,m}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{d_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})^2}\,\delta_{nm}
$$

$$(n, m = 0, \ell+1, \ell+2, \ldots, n_{\max}), \quad n_{\max} = N \text{ or } \infty,$$

$$d_{\ell,n}(\boldsymbol{\lambda})^2 = d_n(\boldsymbol{\lambda})^2 \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) - \mathcal{E}(j;\boldsymbol{\lambda})}{\mathcal{E}(j;\boldsymbol{\lambda})^2}.$$

本節の議論の詳細と，多くの具体例については [60] 参照.

第 8 章

ハイゼンベルグ描像での可解性：離散量子力学

第 3 章で示した，正弦的座標に関するハイゼンベルグ演算子解の理論は，離散量子力学においても全く同様に成り立つ．これは，閉性関係式が交換関係のみを含むことに依る．oQM では，シュレーディンガー表示で完全に解けても，ハイゼンベルグ演算子解の存在しないもの，例えば遠心力付きのクーロンポテンシャル等（2.3.2 節）があるが，離散量子力学では，そのような例外は存在しない．これは，8.4 節で展開する可解な離散量子力学の統一理論で自然に理解される．

8.1 ハイゼンベルグ運動方程式

第 3 章の理論がそのまま成り立ち，idQM, rdQM のそれぞれ 3 つの例は，閉性関係式 (3.4) を満たす．そこに現れる R_0, $R_{\pm1}$ のデータを示す．

idQM の 3 つの例 (6.15)–(6.17) のデータは

$$\text{MP}:\quad R_1(y)=0,\quad R_0(y)=4,\quad R_{-1}(y)=0, \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}\text{W}:\quad &R_1(y)=2,\quad R_0(y)=4y+b_1(b_1-2),\\ &R_{-1}(y)=-2y^2+(b_1-2b_2)y+(2-b_1)b_3,\\ &\qquad b_2\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{1\le j<k\le 4}a_ja_k,\quad b_3\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{1\le j<k<l\le 4}a_ja_ka_l,\end{aligned} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}\text{AW}:\quad &R_1(y)=(q^{-\frac12}-q^{\frac12})^2y',\qquad y'\stackrel{\text{def}}{=}y+1+q^{-1}b_4,\\ &R_0(y)=(q^{-\frac12}-q^{\frac12})^2\,\bigl(y'^2-(1+q^{-1})^2b_4\bigr),\\ &R_{-1}(y)=\tfrac12(q^{-\frac12}-q^{\frac12})^2\bigl((b_1+q^{-1}b_3)y'\\ &\qquad\qquad -(1+q^{-1})(b_3+q^{-1}b_1b_4)\bigr)-R_0(y),\\ &\qquad b_1\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^4 a_j,\quad b_3\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{1\le j<k<l\le 4}a_ja_ka_l.\end{aligned} \tag{8.3}$$

MP の閉性関係式および生成・消滅演算子は 2001 年に与えられた[56]．rdQM の 3 つの例 (6.18)–(6.20) のデータは

$$\text{M}:\quad R_1(y)=0,\quad R_0(y)=1,\quad R_{-1}(y)=-\frac{1+c}{1-c}y-\frac{\beta c}{1-c},\tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}\text{R}:\quad &R_1(y)=2,\quad R_0(y)=4y+\tilde{d}^2-1,\\ &R_{-1}(y)=2y^2+\big(2(ab+bc+ca)-(1+d)(1+\tilde{d})\big)y\\ &\qquad +abc(\tilde{d}-1),\end{aligned}\tag{8.5}$$

$$\begin{aligned}q\text{R}:\quad &R_1(y)=y'(q^{-\frac12}-q^{\frac12})^2,\qquad y'\stackrel{\text{def}}{=}y+1+\tilde{d},\\ &R_0(y)=\big(y'^2-(q^{-\frac12}+q^{\frac12})^2\tilde{d}\big)(q^{-\frac12}-q^{\frac12})^2,\\ &R_{-1}(y)=\Big((1+d)y'^2-\big(a+b+c+d+\tilde{d}+(ab+bc+ca)q^{-1}\big)y'\\ &\qquad +(1-a)(1-b)(1-c)(1-\tilde{d}q^{-1})\\ &\qquad +\big(a+b+c-1-d\tilde{d}+(ab+bc+ca)q^{-1}\big)(1+\tilde{d})\Big)\\ &\qquad\quad \times(q^{-\frac12}-q^{\frac12})^2.\end{aligned}\tag{8.6}$$

これらのデータ (8.1)–(8.6) を用いれば，第 3 章の処方 (3.17)–(3.21), (3.22)–(3.24), (3.25)–(3.26) に従って，生成・消滅演算子，動力学対称性代数，コヒーレント状態等の具体形を書き下すことができる．idQM の例では，

$$\text{MP}:\quad \alpha_\pm(\mathcal{H})=\pm2,\quad a^{(\pm)}=\frac{\pm1}{4}[\mathcal{H},\eta]+\frac12\eta,\tag{8.7}$$

$$[\mathcal{H},a^{(\pm)}]=\pm2\,a^{(\pm)},\quad [a^{(-)},a^{(+)}]=(\mathcal{H}+2a)/4,\tag{8.8}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{su}(1,1)\text{ 代数}:\quad &J^\pm=2\,a^{(\pm)},\quad J^3=(\mathcal{H}+2a)/2,\\ &[J^3,J^\pm]=\pm J^\pm,\quad [J^-,J^+]=2J^3,\end{aligned}\tag{8.9}$$

$$\begin{aligned}\text{コヒーレント状態}:\quad \psi(\alpha,x)&=\phi_0(x)\sum_{n=0}^\infty\frac{(2\alpha)^n}{(2a)_n}P_n(\eta(x))\\ &=\phi_0(x)\,e^{2i\alpha}{}_1F_1\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{a+ix}{2a}\;\Big|\;-4i\alpha\Big),\end{aligned}\tag{8.10}$$

$$\text{W}:\quad \alpha_\pm(\mathcal{H})=1\pm2\sqrt{\mathcal{H}'},\quad \mathcal{H}'=\mathcal{H}+\tfrac14(b_1-1)^2,\tag{8.11}$$

$$[\mathcal{H},a^{(\pm)}]=a^{(\pm)}(1\pm2\sqrt{\mathcal{H}'}),\tag{8.12}$$

コヒーレント状態:

$$\psi(\alpha,x)=\phi_0(x)\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n(b_1)_{2n}\,\alpha^n}{n!\prod_{1\le j<k\le4}(a_j+a_k)_n}P_n(\eta(x)),\tag{8.13}$$

$$\begin{aligned}\text{AW}:\quad &\alpha_\pm(\mathcal{H})=\tfrac12(q^{-\frac12}-q^{\frac12})^2\mathcal{H}'\pm\tfrac12(q^{-1}-q)\sqrt{\mathcal{H}'^2-4q^{-1}b_4},\\ &\mathcal{H}'=\mathcal{H}+1+q^{-1}b_4,\end{aligned}\tag{8.14}$$

$$[\mathcal{H},a^{(\pm)}]=\tfrac12a^{(\pm)}\Big((q^{-\frac12}-q^{\frac12})^2\mathcal{H}'\pm(q^{-1}-q)\sqrt{\mathcal{H}'^2-4q^{-1}b_4}\Big),\tag{8.15}$$

コヒーレント状態:

$$\psi(\alpha,x)=\phi_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(b_4\,;q)_{2n}\alpha^n}{(q\,;q)_n\prod_{1\le j<k\le 4}(a_ja_k\,;q)_n}P_n(\eta(x)).\quad(8.16)$$

W および AW では，交換関係 $[a^{(+)},a^{(-)}]$ は非常に複雑な表式になる．idQM の他の多項式の場合の種々の具体例については [30] 参照．

idQM の例 (8.7)–(8.16) に倣って，rdQM の 3 つの例のデータ (8.4)–(8.6) に基づいて，M, R, qR の生成・消滅演算子，動力学対称性代数，コヒーレント状態等の具体形を書き下すことを練習問題としよう．

8.2 双対多項式

この節では，実数ずらしの rdQM において重要な役割を果たす**双対多項式** (dual polynomial) に焦点を当てて，それを通じて「離散変数の直交多項式」[55] の多くの性質を明らかにしよう．双対多項式は，元々の固有値問題，差分シュレーディンガー方程式 (6.9) あるいは (6.12) を，別の解き方で解いて得られる[29]．この方法は，従来のもの[62], [63]と比べて，直感的であるという利点がある．rdQM のハミルトニアン $\mathcal{H}$ (6.7) は有限次元 ($x_{\max}=N$) あるいは無限次元 ($x_{\max}=\infty$) の**三重対角** (tri-diagonal) 行列（Jacobi 行列）である:

$$\mathcal{H}=(\mathcal{H}_{x,y})_{0\le x,y\le x_{\max}},\quad \mathcal{H}_{x,y}=\mathcal{H}_{y,x},\quad(8.17)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{x,y}&=-\sqrt{B(x)D(x+1)}\,\delta_{x+1,y}-\sqrt{B(x-1)D(x)}\,\delta_{x-1,y}\\&\quad+\big(B(x)+D(x)\big)\delta_{x,y}.\end{aligned}\quad(8.18)$$

ヤコビ行列の固有値には縮退がない（(1.3)）．ハミルトニアンの因子 $\mathcal{A}^{\dagger}$ (6.5) は，下三角行列で，対角成分とその 1 つ下だけが零でない．そして $\mathcal{A}$ は上三角行列で，対角成分とその 1 つ上だけが零でない．本書を通じて，(0,0) 成分が左上隅にくる通常の慣例に従う．相似変換したハミルトニアン $\widetilde{\mathcal{H}}$ (6.14) もまた三重対角である:

$$\widetilde{\mathcal{H}}=(\widetilde{\mathcal{H}}_{x,y})_{0\le x,y\le x_{\max}},$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{x,y}=B(x)(\delta_{x,y}-\delta_{x+1,y})+D(x)(\delta_{x,y}-\delta_{x-1,y}).$$

相似変換した固有値問題 $\widetilde{\mathcal{H}}v(x)=\mathcal{E}\,v(x)$ (6.12) は，記号を $v(x)\to{}^t(Q_0,Q_1,\ldots,Q_x,\ldots)$ のように変えて行列の固有値問題に書き直せる:

$$\sum_{y=0}^{x_{\max}}\widetilde{\mathcal{H}}_{x,y}Q_y=\mathcal{E}Q_x\quad(x=0,1,\ldots,x_{\max}).$$

$\widetilde{\mathcal{H}}$ が三重対角行列なので，上の固有値方程式は，$\mathcal{E}$ の多項式としての $\{Q_x\}$ の三項関係式になっている ($x=0,1,\ldots,x_{\max}$):

$$\mathcal{E}Q_x(\mathcal{E})=B(x)\big(Q_x(\mathcal{E})-Q_{x+1}(\mathcal{E})\big)+D(x)\big(Q_x(\mathcal{E})-Q_{x-1}(\mathcal{E})\big). \quad (8.19)$$

境界（初期）条件 $Q_0=1,\ Q_{-1}=0$ から始めて，$Q_x(\mathcal{E})$ が変数 $\mathcal{E}$ の x 次の多項式として定まる．(8.19) で，$\mathcal{E}=0$ とおいて，

$$Q_x(0)=1 \quad (x=0,1,\ldots,x_{\max}), \quad (8.20)$$

が判る．$Q_x(\mathcal{E})$ で，$\mathcal{E}$ に実際の n 番目の固有値 $\mathcal{E}(n)$ (7.10)–(7.12) を代入すれば，固有ベクトルが得られる:

$$\sum_{y=0}^{x_{\max}}\widetilde{\mathcal{H}}_{x,y}Q_y(\mathcal{E}(n))=\mathcal{E}(n)Q_x(\mathcal{E}(n)) \quad (x=0,1,\ldots,x_{\max}).$$

有限次元の場合には，多項式列 $\{Q_0(\mathcal{E}),\ldots,Q_N(\mathcal{E})\}$ は $x=0,\ldots,N-1$ までの三項関係式 (8.19) によって定まる．最後の方程式

$$\mathcal{E}Q_N(\mathcal{E})=D(N)\big(Q_N(\mathcal{E})-Q_{N-1}(\mathcal{E})\big),$$

は，$\mathcal{E}$ の $N+1$ 次の代数方程式（特性方程式）であり，すべての固有値 $\{\mathcal{E}(n)\}$ を決定する．

固有値問題 (6.12) の固有値 $\mathcal{E}(n)$ に属する固有ベクトルの 2 つの表式（多項式）$P_n(\eta(x))$ と $Q_x(\mathcal{E}(n))$ とが得られた．ヤコビ行列のスペクトルには縮退がないので，これらは乗法因子 α_n を除いて等しい:

$$P_n(\eta(x))=\alpha_nQ_x(\mathcal{E}(n)) \quad (x=0,1,\ldots,x_{\max}).$$

$x=0$（あるいは $n=0$）での境界（初期）条件 (6.10), (6.11), (8.20) ($n_{\max}\stackrel{\text{def}}{=}x_{\max}$);

$$P_n(\eta(0))=P_n(0)=1=Q_0(\mathcal{E}(n)), \qquad (n=0,1,\ldots,n_{\max}),$$
$$P_0(\eta(x))=1=Q_x(0)=Q_x(\mathcal{E}(0)), \quad (x=0,1,\ldots,x_{\max}),$$

を考慮すると，これらの乗法因子は 1 になる．

多項式 $\{P_n(\eta)\}$ とその双対多項式 $\{Q_x(\mathcal{E})\}$ とが，整数格子点上で等しいことが確立された:

$$P_n(\eta(x))=Q_x(\mathcal{E}(n)) \quad (n=0,1,\ldots,n_{\max}\ ;\ x=0,1,\ldots,x_{\max}). \quad (8.21)$$

実際，超幾何関数による表示 (6.24)–(6.26):

$$\text{M}:\ {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-n,\ -x\\ \beta\end{matrix}\ \Big|\ 1-c^{-1}\Big);\quad \text{R}:\ {}_4F_3\Big(\begin{matrix}-n,\ n+\tilde{d},\ -x,\ x+d\\ a,\ b,\ c\end{matrix}\ \Big|\ 1\Big);$$
$$q\text{R}:\ {}_4\phi_3\Big(\begin{matrix}q^{-n},\ \tilde{d}q^n,\ q^{-x},\ dq^x\\ a,\ b,\ c\end{matrix}\ \Big|\ q\,;q\Big),$$

は，$0\le n\le n_{\max}$ を固定すると，$\eta(x)=x$ (M), $x(x+d)$ (R), $(q^{-x}-1)(1-dq^x)$

(qR) の n 次の多項式を与え，$0 \le x \le x_{\max}$ を固定すると，$\mathcal{E}(n) = n$ (M), $n(n+\tilde{d})$ (R), $(q^{-n}-1)(1-\tilde{d}q^n)$ (qR) の x 次の多項式を与えることが判る．これが，上の双対性 (8.21) の意味である．

固有多項式 $P_n(\eta(x))$ の完全性関係式

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} d_n^2 P_n(\eta(x))P_n(\eta(y)) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} d_n^2 Q_x(\mathcal{E}(n))Q_y(\mathcal{E}(n)) = \frac{1}{\phi_0(x)^2}\,\delta_{x,y}, \tag{8.22}$$

は，直交関係式 (6.30) の双対であるが，双対多項式 $Q_x(\mathcal{E}(n))$ の直交性関係式として理解できる．前者の正規化定数 d_n^2 は，後者の直交重み関数になる．

実対称（エルミート）行列 $\mathcal{H}_{x,y}$ (8.18) はその固有値とそれに属する正規化された固有関数の完全系で表される（スペクトル分解）:

$$\mathcal{H}_{x,y} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \mathcal{E}(n)\hat{\phi}_n(x)\hat{\phi}_n(y),$$
$$\hat{\phi}_n(x) = d_n\phi_0(x)P_n(\eta(x)) = d_n\phi_0(x)Q_x(\mathcal{E}(n)).$$

その三重対角性は多項式 $P_n(\eta(x))$ の差分方程式，或いは双対多項式 $Q_x(\mathcal{E}(n))$ の三項関係式を使って容易に確かめることができる．

双対性の対応をまとめると

$$x \leftrightarrow n, \quad \eta(x) \leftrightarrow \mathcal{E}(n), \quad \eta(0)=0 \leftrightarrow \mathcal{E}(0)=0, \tag{8.23}$$

$$B(x) \leftrightarrow -A_n, \quad D(x) \leftrightarrow -C_n, \quad \frac{\phi_0(x)}{\phi_0(0)} \leftrightarrow \frac{d_n}{d_0}, \tag{8.24}$$

$$\frac{\eta(x+1)-\eta(x)}{\eta(1)} = \varphi(x) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{d}}(n) = \frac{\mathcal{E}(n+1)-\mathcal{E}(n)}{\mathcal{E}(1)} = \frac{\alpha_+(\mathcal{E}(n))}{\mathcal{E}(1)}. \tag{8.25}$$

ポテンシャル関数 $B(x)$ と $D(x)$ とが，多項式 $P_n(\eta)$ の差分方程式を規定し，その解は正弦的座標 $\eta(x)$ の知識を必要とし，固有値として $\mathcal{E}(n)$ が登場する．その同じ関数達 $B(x)$, $D(x)$ が双対多項式 $Q_x(\mathcal{E})$ の三項関係式を指定するが，これにはそのスペクトル $\mathcal{E}(n)$ は必要でない．同様に (3.2) の A_n と C_n が，多項式 $P_n(\eta)$ の三項関係式を指定するが，これには正弦的座標 $\eta(x)$ の知識は必要でない．2 種類の多項式 $P_n(\eta)$ と $Q_x(\mathcal{E})$ が固有値問題 (1.66) の固有ベクトルとなることが要求されるのである．

双対多項式 $Q_x(\mathcal{E}(n))$ については，A_n と C_n が n に関する差分方程式

$$\eta(x)Q_x(\mathcal{E}(n)) = A_n\big(Q_x(\mathcal{E}(n+1)) - Q_x(\mathcal{E}(n))\big) + C_n\big(Q_x(\mathcal{E}(n-1)) - Q_x(\mathcal{E}(n))\big), \tag{8.26}$$

を規定し，正弦的座標 $\eta(x)$ が固有値になり，$\mathcal{E}(n)$ が正弦的座標になり，その

具体形が必要となる．特定のハミルトニアン (6.7) の固有値問題 (1.66) が，多項式 $P_n(\eta)$ と双対多項式 $Q_x(\mathcal{E})$ およびスペクトル $\mathcal{E}(n)$ と正弦的座標 $\eta(x)$ を決定し，同時に直交重み関数 $\phi_0(x)^2$ と正規化定数 d_n^2 も与えるということをもう一度強調しよう．

正弦的座標 $\eta(x)$ に関するハイゼンベルグ演算子解を三項関係式 (3.2) と比べることにより，その係数 A_n, B_n と C_n が決定される:

$$A_0 = R_{-1}(0)R_0(0)^{-1}, \quad C_0 = 0, \quad B_n = -(A_n + C_n), \tag{8.27}$$

$$A_n = \frac{R_{-1}(\mathcal{E}(n)) + \eta(1)\big(\mathcal{E}(n) - B(0)\big)\alpha_+(\mathcal{E}(n))}{\alpha_+(\mathcal{E}(n))\big(\alpha_+(\mathcal{E}(n)) - \alpha_-(\mathcal{E}(n))\big)} \quad (n \geq 1), \tag{8.28}$$

$$C_n = \frac{R_{-1}(\mathcal{E}(n)) + \eta(1)\big(\mathcal{E}(n) - B(0)\big)\alpha_-(\mathcal{E}(n))}{\alpha_-(\mathcal{E}(n))\big(\alpha_-(\mathcal{E}(n)) - \alpha_+(\mathcal{E}(n))\big)} \quad (n \geq 1). \tag{8.29}$$

4 つの重要なパラメタの間に，注目すべき関係式

$$A_0\mathcal{E}(1) + B(0)\eta(1) = 0 \tag{8.30}$$

がある．これらの導出の詳細は [29] の (4.45)–(4.53) を参照．3 つの例については，

$$\text{M: } A_n = -\frac{c}{1-c}(n+\beta), \quad C_n = -\frac{1}{1-c}, \quad \varphi^{\mathrm{d}}(n) = 1, \tag{8.31}$$

$$\text{R: } A_n = \frac{(n+a)(n+b)(n+c)(n+\tilde{d})}{(2n+\tilde{d})(2n+1+\tilde{d})}, \ \varphi^{\mathrm{d}}(n) = \frac{2n+\tilde{d}+1}{1+\tilde{d}}, \tag{8.32}$$

$$C_n = \frac{(n+\tilde{d}-a)(n+\tilde{d}-b)(n+\tilde{d}-c)n}{(2n-1+\tilde{d})(2n+\tilde{d})}, \tag{8.33}$$

$$q\text{R: } A_n = \frac{(1-aq^n)(1-bq^n)(1-cq^n)(1-\tilde{d}q^n)}{(1-\tilde{d}q^{2n})(1-\tilde{d}q^{2n+1})}, \tag{8.34}$$

$$C_n = d\frac{(1-a^{-1}\tilde{d}q^n)(1-b^{-1}\tilde{d}q^n)(1-c^{-1}\tilde{d}q^n)(1-q^n)}{(1-\tilde{d}q^{2n-1})(1-\tilde{d}q^{2n})}, \tag{8.35}$$

$$\varphi^{\mathrm{d}}(n) = \frac{q^{-n}-\tilde{d}q^{n+1}}{1-\tilde{d}q}. \tag{8.36}$$

$B(x)$, $D(x)$ の形 (6.18)–(6.20) と A_n, C_n の具体形 (8.31)–(8.36) を比べると，M は**自己双対** (self-dual), R と qR は，それぞれ自分自身と同じ形の多項式と双対であるが，$d \to \tilde{d}$ とパラメタの変更が必要であることが判る．他には，Krawtchouk 多項式，Charlier 多項式等が自己双対である．当然ながら，(q-)Hahn 多項式と双対 (q-)Hahn 多項式は互いに双対である．

(6.35) の双対として，

$$\frac{d_n^2}{d_0^2} = \prod_{m=0}^{n-1}\frac{A_m}{C_{m+1}}, \tag{8.37}$$

が成り立つ．(7.16)–(7.17) の双対として，

$$A_n(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = \kappa^{-1}\frac{\varphi^{\mathrm{d}}(n+1;\boldsymbol{\lambda})}{\varphi^{\mathrm{d}}(n;\boldsymbol{\lambda})}A_{n+1}(\boldsymbol{\lambda}), \tag{8.38}$$

$$C_n(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = \kappa^{-1}\frac{\varphi^{\mathrm{d}}(n-1;\boldsymbol{\lambda})}{\varphi^{\mathrm{d}}(n;\boldsymbol{\lambda})}C_n(\boldsymbol{\lambda}), \tag{8.39}$$

(7.19)–(7.20) の双対として

$$\sqrt{-A_0(\boldsymbol{\lambda})}\,\frac{d_n}{d_0}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = \varphi^{\mathrm{d}}(n;\boldsymbol{\lambda})\sqrt{-A_n(\boldsymbol{\lambda})}\,\frac{d_n}{d_0}(\boldsymbol{\lambda}), \tag{8.40}$$

$$\sqrt{-A_0(\boldsymbol{\lambda})}\,\frac{d_n}{d_0}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = \varphi^{\mathrm{d}}(n\,;\boldsymbol{\lambda})\sqrt{-C_{n+1}(\boldsymbol{\lambda})}\,\frac{d_{n+1}}{d_0}(\boldsymbol{\lambda}), \tag{8.41}$$

が成り立つ．

まとめると，rdQM の固有多項式 $P_n(\eta(x))$ は，x に関する差分方程式

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(n)P_n(\eta(x)) &= B(x)\big(P_n(\eta(x)) - P_n(\eta(x+1))\big)\\ &\quad + D(x)\big(P_n(\eta(x)) - P_n(\eta(x-1))\big),\end{aligned}$$

および三項関係式

$$\begin{aligned}\eta(x)P_n(\eta(x)) &= A_n\big(P_{n+1}(\eta(x)) - P_n(\eta(x))\big)\\ &\quad + C_n\big(P_{n-1}(\eta(x)) - P_n(\eta(x))\big),\end{aligned} \tag{8.42}$$

を満たす．一方では，$\eta(x)$ が正弦的座標で，$\mathcal{E}(n)$ が固有値であるが，他方では，n に関する差分方程式の固有値として $\eta(x)$ が登場する．後者は，双対多項式の三項関係式 (8.26) でもある．このように，二種類の固有値方程式を満たすことを，**双スペクトル** (bi-spectral) 性を持つという．

8.3 可解な出生死亡過程

2.5 節で oQM とフォッカー・プランク方程式の関係を論じたが，これは容易に実数ずらしの dQM にも拡張される．対応するのは離散化された確率過程，マルコフ連鎖 (Markov chain) である．**出生死亡過程** (birth and death process)[5] は最もよく知られた例であり，人口問題，待ち行列理論，在庫管理，化学反応などに多彩な応用がある．可解な rdQM[29] とその拡張[60], [64], [65] は，**可解な出生死亡過程**[66] を与える．出生死亡過程の方程式は 1 次元フォッカー・プランク方程式の離散版

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(x;t) = (L_{BD}\mathcal{P})(x;t), \quad \mathcal{P}(x;t) \ge 0, \quad \sum_x \mathcal{P}(x;t) = 1, \tag{8.43}$$

である．ここで，$\mathcal{P}(x;t)$ は，パラメタ x の適当な離散集合の上で定義された確率分布である．ここでは簡単に，連続した非負整数の，有限または無限集合

$$x \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \quad x \in [0, x_{\max}],$$

を扱う．この集合以外の x では $\mathcal{P}(x;t)=0$ である．出生死亡演算子 L_{BD} は，rdQM のハミルトニアン $\mathcal{H}$（(6.7)）をその基底状態波動関数 $\phi_0(x)$ で，逆相似変換

$$L_{BD} \stackrel{\text{def}}{=} -\phi_0 \circ \mathcal{H} \circ \phi_0^{-1} = (e^{-\partial}-1)B(x) + (e^{\partial}-1)D(x), \qquad (8.44)$$

したものである．対応するフォッカー・プランク演算子 L_{FP} (2.26) と比べて欲しい．この場合の出生死亡過程の方程式を明示的に書くと，

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(x;t) = -\bigl(B(x)+D(x)\bigr)\mathcal{P}(x;t) + B(x-1)\mathcal{P}(x-1;t) + D(x+1)\mathcal{P}(x+1;t), \qquad (8.45)$$

となる．ここで，$B(x)$ は人口 x の集団の出生率で，$D(x)$ は死亡率である．明らかに，出生死亡演算子 L_{BD} は半負定値で，その固有関数はハミルトニアン $\mathcal{H}$（(6.7)）の固有関数 $\{\phi_n(x)\}$ を用いて $\{\phi_0(x)\phi_n(x)\}$ で与えられる（(2.27) 参照）：

$$L_{BD}\phi_0(x)\phi_n(x) = -\mathcal{E}(n)\phi_0(x)\phi_n(x), \quad n=0,1,\ldots.$$

このことから，フォッカー・プランク方程式の時（2.5 節）と同様に，勝手な初期の確率分布 $\mathcal{P}(x;0)$ から出発しても，無限の未来では定常分布 $\hat{\phi}_0^2(x)$(2.28) が実現することが判る．ここで，$\hat{\phi}_n(x)$ は，$\phi_n(x)$ を正規化したものである．

$t=0$ に人口 y であった系 ($\mathcal{P}(x;0)=\delta_{x,y}$) が時刻 $t>0$ で，人口 x になる推移確率は，フォッカー・プランク方程式の場合と全く同じ表式 (2.29) で与えられる：

$$\mathcal{P}(y,x;t) = \hat{\phi}_0(x)\hat{\phi}_0(y)^{-1}\sum_{n=0} e^{-\mathcal{E}(n)t}\hat{\phi}_n(x)\hat{\phi}_n(y), \quad t>0. \qquad (8.46)$$

当然ながら，これはチャップマン・コルモゴロフ方程式 (2.31) も満たす．固有多項式 $P_n(\eta(x))$, (6.10)–(6.12) を用いた表式は

$$\mathcal{P}(y,x;t) = \phi_0(x)^2\sum_{n=0} d_n^2\, e^{-\mathcal{E}(n)t}P_n(\eta(x))P_n(\eta(y)), \quad t>0, \qquad (8.47)$$

となる．ここで d_n は (6.30) で定義された，正規化定数である．ここで強調すべきことは，これらの公式 (8.46)–(8.47) すべてが，明示的に与えられていることである．これは，Karlin-McGregor[67] のスペクトル表示による一般公式と異なる点である．双対多項式 (8.21) を用いると推移確率の表式は

$$\mathcal{P}(y,x;t) = \phi_0(x)^2\sum_{n=0} d_n^2\, e^{-\mathcal{E}(n)t}Q_x(\mathcal{E}(n))Q_y(\mathcal{E}(n)), \quad t>0, \qquad (8.48)$$

となる．歴史的な理由でここに現れる双対多項式 $Q_x(\mathcal{E})$ は出生・死亡多項式，あるいは Karlin-McGregor 多項式[67] と呼ばれる．実数ずらしの離散量子力学の固有関数の中には，直交関係式が Jackson 積分で表されるもの，例えば big

表 8.1　可解な出生死亡過程の翻訳表.

	慣例 [5], [68]	本書
人口	$n=0,1,\ldots,(N),\ldots$	$x=0,1,\ldots,(N),\ldots$
確率	$p_n(t)$	$\mathcal{P}(x;t)$
出生率	$\lambda_n\ \ (\lambda_N=0)$	$B(x)\ \ (B(N)=0)$
死亡率	$\mu_n\ \ (\mu_0=0)$	$D(x)\ \ (D(0)=0)$

q-Jacobi 多項式等，が存在する[6]．本節の可解な出生死亡過程の理論は，これら Jackson 積分のもの以外のすべての rdQM の系について成り立つ．更に，これらを変形して得られる多添え字多項式等についても成り立つ．

本節を終える前に，出生死亡過程の方程式 (8.45) の慣例の形，[67], [68] の XVII.5，[5] の §5.2 等，を述べておこう．人口は，n で表され

$$\frac{\partial}{\partial t}p_n(t)=-(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t),\qquad(8.49)$$

λ_n が人口 n の集団の出生率で，μ_n は死亡率である．記号などの翻訳表を載せよう（表 8.1)．有限な場合の境界条件 $\lambda_N=0$ $(B(N)=0)$ ((6.6)) は，系が人口 N で反射壁を持つと言われる．

8.4　可解な離散量子力学の統一理論

この節では，正弦的座標に満たすべきいくつかの性質を要請し，それに基づいて，純虚数ずらしおよび実数ずらしの dQM の可解な‘ハミルトニアン’を構成する[57]．一般的な戦略は，$\eta(x)$ の多項式を同じ次数の別の多項式に写すような相似変換した‘ハミルトニアン’ $\widetilde{\mathcal{H}}$ ((6.13))

$$\widetilde{\mathcal{H}}\mathcal{V}_n\subseteq\mathcal{V}_n\subset\mathcal{V}_\infty\quad(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}),\qquad(8.50)$$

を作ることである．$\mathcal{V}_n$ は (1.69) で定義されたもので，$\mathcal{V}_\infty\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\mathcal{V}_n$ である．これは，‘ハミルトニアン’ $\widetilde{\mathcal{H}}$ がこの基底に関して，**三角性**を持つということで，可解性に導く．

以下では，出発点として，$\mathcal{H}$ の代わりに，$\widetilde{\mathcal{H}}$ (6.13) を取ることにする．つまり，議論を逆転させて，正弦的座標 $\eta(x)$ に基づいて‘ハミルトニアン’ $\widetilde{\mathcal{H}}$ (6.13) を直接構成する．

8.4.1　ポテンシャル関数

$\eta(x)$ の多項式を別の多項式に写す‘ハミルトニアン’ $\widetilde{\mathcal{H}}$ の一般的な形は，次のポテンシャル関数 $V_\pm(x)$ (6.13):

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\varepsilon\Big(V_+(x)(e^{\beta p}-1)+V_-(x)(e^{-\beta p}-1)\Big),\qquad(8.51)$$

$$V_\pm(x)=\frac{\widetilde{V}_\pm(x)}{\bigl(\eta(x\mp i\beta)-\eta(x)\bigr)\bigl(\eta(x\mp i\beta)-\eta(x\pm i\beta)\bigr)}, \tag{8.52}$$

$$\widetilde{V}_\pm(x)=\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l\leq 2}} v_{k,l}\,\eta(x)^k\eta(x\mp i\beta)^l, \tag{8.53}$$

によって実現される．ここで，idQM では $\epsilon=1,\beta=1,\gamma\in\mathbb{R}$，rdQM では $\epsilon=-1,\beta=i=\sqrt{-1}$ である．分子の $\widetilde{V}_\pm(x)$ は，$\eta(x)$ の 2 次までの多項式で，$v_{k,l}$ は，$\sum_{k+l=2} v_{k,l}^2\neq 0$ の制限を満たすパラメタである．同じ $v_{k,l}$ が $\widetilde{V}_\pm(x)$ の両方に現れていることが重要である．上の $V_\pm(x)$ で作られた 'ハミルトニアン' $\widetilde{\mathcal{H}}$ (8.51) は，$\eta(x)$ の n 次多項式を n 次多項式に写す．これは，正弦的座標のいくつかの性質に依存する．まず，rdQM では $\eta(x)$ は実関数で，idQM では，$\eta^*=\eta$ を満たす．更に，

$$\eta(0)=0,$$

を要求する．rdQM ではこれが，基本的な出発点 (6.10) であるが，idQM では本質的ではなく，rdQM との統一理論を作るための方便である．$\eta(x)$ の多項式は，アファイン変換した $a\eta(x)+b$ (a,b: 実定数) の多項式でもあるので，上の性質 (8.50) は変わらない．正弦的座標の 2 つの '基本的性質' の第一は，対称ずらし・和性質:

$$\eta(x-i\beta)+\eta(x+i\beta)=(2+r_1^{(1)})\eta(x)+r_{-1}^{(2)}, \tag{8.54}$$

第二は，対称ずらし・積性質

$$\eta(x-i\beta)\eta(x+i\beta)=\bigl(\eta(x)-\eta(-i\beta)\bigr)\bigl(\eta(x)-\eta(i\beta)\bigr), \tag{8.55}$$

である．この際に，ずらしの非自明性，$\eta(x)\neq\eta(x-i\beta)\neq\eta(x+i\beta)\neq\eta(x)$ を要求する．ここで，$r_1^{(1)}$ と $r_{-1}^{(2)}$ は，実パラメタで，これらは既に，閉性関係式 (3.4) に出てくる 3 つの関数 R_0, R_1 と R_{-1} に現れていた:

$$R_1(y)=r_1^{(1)}y+r_1^{(0)},\ R_0(y)=r_0^{(2)}y^2+r_0^{(1)}y+r_0^{(0)}, \tag{8.56}$$

$$R_{-1}(y)=r_{-1}^{(2)}y^2+r_{-1}^{(1)}y+r_{-1}^{(0)}. \tag{8.57}$$

上の 2 つの条件 (8.54)–(8.55) を満たす正弦的座標の一覧を載せよう．idQM には，8 つの正弦的座標があり

$$\text{(i)}:\eta(x)=x,\qquad -\infty<x<\infty,\quad \gamma=1, \tag{8.58}$$

$$\text{(ii)}:\eta(x)=x^2,\qquad 0<x<\infty,\quad \gamma=1, \tag{8.59}$$

$$\text{(iii)}:\eta(x)=1-\cos x,\qquad 0<x<\pi,\quad \gamma\in\mathbb{R}_{\neq 0}, \tag{8.60}$$

$$\text{(iv)}:\eta(x)=\sin x,\qquad -\tfrac{\pi}{2}<x<\tfrac{\pi}{2},\quad \gamma\in\mathbb{R}_{\neq 0}, \tag{8.61}$$

$$\text{(v)}:\eta(x)=1-e^{-x},\qquad -\infty<x<\infty,\quad \gamma\in\mathbb{R}_{\neq 0}, \tag{8.62}$$

$$(\mathrm{vi}):\eta(x)=e^x-1,\qquad -\infty<x<\infty,\quad \gamma\in\mathbb{R}_{\neq0},\tag{8.63}$$
$$(\mathrm{vii}):\eta(x)=\cosh x-1,\qquad 0<x<\infty,\quad \gamma\in\mathbb{R}_{\neq0},\tag{8.64}$$
$$(\mathrm{viii}):\eta(x)=\sinh x,\qquad -\infty<x<\infty,\quad \gamma\in\mathbb{R}_{\neq0},\tag{8.65}$$

rdQM では，5 つの正弦的座標が知られている $(0<q<1)$:

$$(\mathrm{i})':\eta(x)=x,\tag{8.66}$$
$$(\mathrm{ii})':\eta(x)=\epsilon' x(x+d),\quad \epsilon'=\begin{cases}1 \text{ for } d>-1\\ -1 \text{ for } d<-N\end{cases},\tag{8.67}$$
$$(\mathrm{iii})':\eta(x)=1-q^x,\tag{8.68}$$
$$(\mathrm{iv})':\eta(x)=q^{-x}-1,\tag{8.69}$$
$$(\mathrm{v})':\eta(x)=\epsilon'(q^{-x}-1)(1-dq^x),\ \epsilon'=\begin{cases}1 \text{ for } d<q^{-1}\\ -1 \text{ for } d>q^{-N}\end{cases}.\tag{8.70}$$

[29] の §4C に詳しく述べてあるように，rdQM の 5 つの正弦的座標 (8.66)–(8.70) は，(8.54)–(8.55) の解のすべてを尽くしている（勝手な乗法的因子を除いて）．一方で idQM のもの (i)–(viii)（(8.58)–(8.65)）は，すべての要請 (8.54)–(8.55) と形状不変性のための余分な要請（[57] の (3.50)）を満たす典型的な例として挙げただけのものである．

この 2 つの条件 (8.54), (8.55) から，$\eta(x-i\beta)$ と $\eta(x+i\beta)$ の任意の対称多項式は $\eta(x)$ の多項式として表されることが判る．特に，

$$g_n(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\eta(x-i\beta)^{n+1}-\eta(x+i\beta)^{n+1}}{\eta(x-i\beta)-\eta(x+i\beta)}=\begin{pmatrix}\eta(x)\text{ の } n \text{ 次の}\\ \text{多項式}\end{pmatrix}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}g_n^{(k)}\eta(x)^{n-k},$$

が $n\geq1$ で成り立つ．$g_n^*(x)=g_n(x)$ なので，係数 $g_n^{(k)}$ は実である．$0\leq k\leq n$ 以外では，$g_n^{(k)}=0$ としよう．$g_n(x)$ が次の三項関係式 $(n\geq0)$ を満たすので，

$$g_{n+1}(x)=\big(\eta(x-i\beta)+\eta(x+i\beta)\big)g_n(x)-\eta(x-i\beta)\eta(x+i\beta)g_{n-1}(x),$$

$g_n^{(k)}$ を明示的に書き下すことができる．特に $k=0,1$ の $g_n^{(k)}$ は，

$$g_n^{(0)}=[n+1],$$
$$g_n^{(1)}=\begin{cases}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)r_{-1}^{(2)} & \text{for } r_1^{(1)}=0,\\ \dfrac{n[n+1]-(n+1)[n]}{r_1^{(1)}}r_{-1}^{(2)} & \text{for } r_1^{(1)}\neq0,\end{cases}$$

となる．ここで $[n]$ は

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} n & \text{for } r_1^{(1)} = 0, \\ \dfrac{e^{\alpha n} - e^{-\alpha n}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} & \text{for } r_1^{(1)} > 0 \ \big(\Leftarrow r_1^{(1)} = (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})^2 \ (\alpha > 0)\big), \\ \dfrac{e^{i\alpha n} - e^{-i\alpha n}}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} & \text{for } -4 < r_1^{(1)} < 0, \\ & \qquad \big(\Leftarrow r_1^{(1)} = (e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})^2 \ \ (0 < \alpha < \pi)\big), \end{cases}$$

のように定義されている．2 つの実定数 $r_1^{(1)}$ と $r_{-1}^{(2)}$ は，

$$r_1^{(1)} = [2] - 2, \quad r_{-1}^{(2)} = \eta(-i\beta) + \eta(i\beta),$$

のようにも表される．$n, m \in \mathbb{Z}$ と $n \geq m - 1$ について，和公式

$$\sum_{r=m}^{n} g_r^{(1)} \tag{8.71}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{12}(n+m+1)(n-m+1)(n^2+2n+m^2)\, r_{-1}^{(2)} & r_1^{(1)} = 0, \\ \dfrac{(n+1)[n+1] - m[m] - [\frac{1}{2}]^{-2}[\frac{n+m+1}{2}][\frac{n-m+1}{2}]}{r_1^{(1)}}\, r_{-1}^{(2)} & r_1^{(1)} \neq 0, \end{cases}$$

が成り立つ．$[n]$ の公式

$$[a][a+c] - [b][b+c] = [a-b][a+b+c], \tag{8.72}$$

$$\sum_{r=m}^{n} [r] = \frac{[\frac{n+m}{2}][\frac{n-m+1}{2}]}{[\frac{1}{2}]} \quad (n, m \in \mathbb{Z}, \ n \geq m-1), \tag{8.73}$$

は有用である．

ポテンシャル関数の公式 (8.52) の本質的な部分は，分母である．分母は，対応する直交多項式の三項関係式の係数の分母の公式 (8.28) と (8.29)（[29] の (4.52) と (4.53) 参照）と同じ形をしている．翻訳規則は**双対性**の対応規則 (8.23)–(8.25) と同じである（[29] の (3.14)–(3.18) も参照のこと）:

$$\mathcal{E}(n) \to \eta(x), \qquad -A_n \to V_+(x), \qquad -C_n \to V_-(x),$$
$$\alpha_+\big(\mathcal{E}(n)\big) \to \eta(x - i\beta) - \eta(x), \quad \alpha_-\big(\mathcal{E}(n)\big) \to \eta(x + i\beta) - \eta(x).$$

公式 (8.53) のうちのいくつかのパラメタ $v_{k,l}$ は余分である．(8.54) と (8.55) を用いると，

$$\eta(x \mp i\beta)^2 = (2 + r_1^{(1)})\eta(x)\eta(x \mp i\beta) - \eta(x)^2$$
$$\qquad + r_{-1}^{(2)}\big(\eta(x) + \eta(x \mp i\beta)\big) - \eta(-i\beta)\eta(i\beta),$$

となる．繰り返すと，単項式 $\eta(x \mp i\beta)^l$ は，一次式 $\eta(x \mp i\beta)$ に $\eta(x)$ の多項式係数が掛かったものに帰着される．これで，$l = 0, 1$ の $v_{k,l}$ を含めれば十分になる．残りの 5 個のパラメタ $v_{k,l}$ $(k + l \leq 2,\, l = 0, 1)$ は独立で，そのうちの一つはハミルトニアン全体の大きさを決める．以下に，$\widetilde{\mathcal{H}}$ が，$\eta(x)$ の n 次

までの空間を不変にすること (8.50) を示そう．

$\widetilde{\mathcal{H}}$ (8.51) の $\eta(x)^n$ への作用は，(8.52) と (8.53) を用いて，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{H}}\eta(x)^n &= \varepsilon\Big(V_+(x)\big(\eta(x-i\beta)^n-\eta(x)^n\big)+V_-(x)\big(\eta(x+i\beta)^n-\eta(x)^n\big)\Big)\\
&= \varepsilon\left(\eta(x-i\beta)-\eta(x+i\beta)\right)^{-1}\Big(\widetilde{V}_+(x)\sum_{r=0}^{n-1}\eta(x)^r\eta(x-i\beta)^{n-1-r}\\
&\qquad\qquad -\widetilde{V}_-(x)\sum_{r=0}^{n-1}\eta(x)^r\eta(x+i\beta)^{n-1-r}\Big)\\
&= \varepsilon\sum_{r=0}^{n-1}\eta(x)^r\,\frac{\widetilde{V}_+(x)\eta(x-i\beta)^{n-1-r}-\widetilde{V}_-(x)\eta(x+i\beta)^{n-1-r}}{\eta(x-i\beta)-\eta(x+i\beta)}\\
&= \varepsilon\sum_{r=0}^{n-1}\eta(x)^r\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l\leq 2}}v_{k,l}\eta(x)^k\,\frac{\eta(x-i\beta)^{l+n-1-r}-\eta(x+i\beta)^{l+n-1-r}}{\eta(x-i\beta)-\eta(x+i\beta)}\\
&= \varepsilon\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l\leq 2}}v_{k,l}\sum_{r=0}^{n-1}\eta(x)^{k+r}g_{n+l-r-2}(x)\\
&= \big(\eta(x)\ \text{の}\ n\ \text{次の多項式}\ \big)\\
&= \varepsilon\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l\leq 2}}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n+l-r-2}v_{k,l}\,g^{(j)}_{n+l-r-2}\,\eta(x)^{n+k+l-2-j}\\
&= \varepsilon\sum_{m=0}^{n}\eta(x)^{n-m}\sum_{j=\max(m-2,0)}^{m}\ \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=2-m+j}}v_{k,l}\sum_{r=0}^{n-1}g^{(j)}_{n+l-r-2}\\
&= \sum_{m=0}^{n}\eta(x)^{n-m}\sum_{j=\max(m-2,0)}^{m}e_{m,j,n}.
\end{aligned}\tag{8.74}$$

ここで，$e_{m,j,n}$ の定義は

$$e_{m,j,n}\stackrel{\text{def}}{=}\varepsilon\sum_{l=0}^{2-m+j}v_{2-m+j-l,l}\sum_{r=0}^{n-1}g^{(j)}_{n+l-r-2}.$$

基底 $\{\eta(x)^n\}_{n=0,1,\ldots}$ での $\widetilde{\mathcal{H}}$ の行列要素は三角形

$$\widetilde{\mathcal{H}}\eta(x)^n=\sum_{m=0}^{n}\eta(x)^m\widetilde{\mathcal{H}}^{\eta}_{m,n},\qquad \widetilde{\mathcal{H}}^{\eta}_{m,n}=\sum_{j=\max(n-2-m,0)}^{n-m}e_{n-m,j,n},$$

となる．係数 $e_{m,0,n}$ と $e_{m,1,n}$ の表式は，(8.73) と (8.71) を用いて

$$e_{m,0,n}=\varepsilon\frac{[\frac{n}{2}]}{[\frac{1}{2}]}\sum_{l=0}^{2-m}v_{2-m-l,l}[\tfrac{n+2l-1}{2}],\tag{8.75}$$

$$e_{m,1,n}=\varepsilon\sum_{l=0}^{3-m}v_{3-m-l,l}$$

$$
\times \begin{cases} \frac{1}{12}n(n+2l-2)\big((n+l-1)^2+l^2-2l\big)r_{-1}^{(2)} & r_1^{(1)}=0, \\ \dfrac{(n+l-1)[n+l-1]-(l-1)[l-1]-[\frac{1}{2}]^{-2}[\frac{n+2l-2}{2}][\frac{n}{2}]}{r_1^{(1)}}r_{-1}^{(2)} & \\ & r_1^{(1)}\neq 0, \end{cases}
\tag{8.76}
$$

となることが判る．これで，$\widetilde{\mathcal{H}}\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_n \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ (8.50) が示された．固有値 $\mathcal{E}(n)$ は

$$
\mathcal{E}(n)=\widetilde{H}^{\eta}_{n,n}=e_{0,0,n}=\varepsilon\frac{[\frac{n}{2}]}{[\frac{1}{2}]}\Big(v_{2,0}[\tfrac{n-1}{2}]+v_{1,1}[\tfrac{n+1}{2}]\Big),
$$

となり，対応する固有関数は $n+1$ 次の行列の行列式表示で与えられる:

$$
P_n\big(\eta(x)\big) \propto \begin{vmatrix} 1 & \eta(x) & \eta(x)^2 & \cdots & \eta(x)^n \\ \mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(n) & \widetilde{H}^{\eta}_{0,1} & \widetilde{H}^{\eta}_{0,2} & \cdots & \widetilde{H}^{\eta}_{0,n} \\ & \mathcal{E}(1)-\mathcal{E}(n) & \widetilde{H}^{\eta}_{1,2} & \cdots & \widetilde{H}^{\eta}_{1,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \text{\Large 0} & & & \mathcal{E}(n-1)-\mathcal{E}(n) & \widetilde{H}^{\eta}_{n-1,n} \end{vmatrix}.
$$

これが可解性の統一的証明である．量子力学の問題に帰着させるためには，自己共役なハミルトニアン $\mathcal{H}$ の存在が必須である．そのためには，2 乗可積分な基底状態波動関数 $\phi_0(x)$ が本質的であり，またこれがパラメタ $v_{0,0},\ldots,v_{2,0}$ の可能な値域を定める．個々の具体系について，パラメタ $\{v_{k,l}\}$ を適当に選ぶことにより，ポテンシャル関数 $V(x)$, $V^*(x)$ および $B(x)$, $D(x)$, (6.15)–(6.20) が再現されることを見るのは易しい．前にも述べたが，dQM の $\phi_0^2(x)$, d_n^2/d_0^2 (6.32)–(6.37) は，ガンマ関数，q-ガンマ関数とそれらを一般化した関数の積で表されるので，ポテンシャル関数 $V(x)$, $V^*(x)$ および $B(x)$, $D(x)$ を因子化しておくと対応がわかりやすい．これが，実際のポテンシャル関数の表示 (6.15)–(6.20) に，元々のパラメタ $\{v_{k,l}\}$ が現れてこない理由である．

形状不変性の統一的証明　上で与えたポテンシャル関数 (8.51)–(8.53) が，そのままで形状不変性の必要十分条件，(7.3)–(7.6) を，適当なパラメタ変換で満たしていることを見るのは易しい．例えば，rdQM では $v_{2,0}\to\kappa v'_{2,0}=-v_{1,1}$, $v_{1,1}\to\kappa v'_{1,1}=v_{2,0}+[2]v_{1,1}$，等などである．対応するパラメタ変換 $\{v_{k,l}\to v'_{k,l}\}$ の具体形は，[57] の (3.51)–(3.56), (3.61)–(3.67) に載っている．これらは，dQM 系のポテンシャル関数 (8.51)–(8.53) が，形状不変性を満たすことの統一的証明になるが，これらのパラメタ $\{v_{k,l}\}$ が通常の理論に現れて来ないので，ここではその詳細は省略する．

8.4.2　ハイゼンベルグ可解性の統一的証明

形状不変性と同様に，正弦的座標 $\eta(x)$ のハイゼンベルグ運動方程式の可解

性は，上で与えたポテンシャル関数 (8.51)–(8.53) を用いると，統一的に示すことができる．言い換えると，閉性関係式

$$[\widetilde{\mathcal{H}},[\widetilde{\mathcal{H}},\eta]\,]=\eta\,R_0(\widetilde{\mathcal{H}})+[\widetilde{\mathcal{H}},\eta]\,R_1(\widetilde{\mathcal{H}})+R_{-1}(\widetilde{\mathcal{H}}), \tag{8.77}$$

は，$e^{\pm 2\beta p}$, $e^{\pm\beta p}$ の係数と，差分演算子を含まないものとの 5 つの方程式に帰着される．$e^{+2\beta p}$ と $e^{-2\beta p}$ および $e^{+\beta p}$ と $e^{-\beta p}$ とのものは同値だから，結局次の 3 つの方程式になる:

$$\begin{aligned}
&\eta(x-2i\beta)-2\eta(x-i\beta)+\eta(x)\\
&\qquad=r_0^{(2)}\eta(x)+r_{-1}^{(2)}+r_1^{(1)}\big(\eta(x-i\beta)-\eta(x)\big),
\end{aligned}\tag{8.78}$$

$$\begin{aligned}
&\big(\eta(x-i\beta)-\eta(x)\big)\big(V_+(x-i\beta)+V_-(x-i\beta)-V_+(x)-V_-(x)\big)\\
&\quad=-\big(r_0^{(2)}\eta(x)+r_{-1}^{(2)}\big)\big(V_+(x-i\beta)+V_-(x-i\beta)+V_+(x)+V_-(x)\big)\\
&\qquad-r_1^{(1)}\big(\eta(x-i\beta)-\eta(x)\big)\big(V_+(x-i\beta)+V_-(x-i\beta)\big)\\
&\qquad+\varepsilon^{-1}\big(r_0^{(1)}\eta(x)+r_{-1}^{(1)}+r_1^{(0)}\big(\eta(x-i\beta)-\eta(x)\big)\big),
\end{aligned}\tag{8.79}$$

$$\begin{aligned}
&2\big(\eta(x)-\eta(x-i\beta)\big)V_+(x)V_-(x-i\beta)\\
&\qquad\qquad+2\big(\eta(x)-\eta(x+i\beta)\big)V_-(x)V_+(x+i\beta)\\
&\quad=\big(r_0^{(2)}\eta(x)+r_{-1}^{(2)}\big)\big(V_+(x)V_-(x-i\beta)+V_-(x)V_+(x+i\beta)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\big(V_+(x)+V_-(x)\big)^2\big)\\
&\qquad+r_1^{(1)}\big(\eta(x-i\beta)-\eta(x)\big)V_+(x)V_-(x-i\beta)\\
&\qquad+r_1^{(1)}\big(\eta(x+i\beta)-\eta(x)\big)V_-(x)V_+(x+i\beta)\\
&\qquad-\varepsilon^{-1}\big(r_0^{(1)}\eta(x)+r_{-1}^{(1)}\big)\big(V_+(x)+V_-(x)\big)+\varepsilon^{-2}\big(r_0^{(0)}\eta(x)+r_{-1}^{(0)}\big).
\end{aligned}\tag{8.80}$$

上に現れる係数 $r_i^{(j)}$ を，ポテンシャル関数 (8.51)–(8.53) のパラメタ $v_{1,0}, v_{0,1}, v_{1,1}, v_{2,0}$ と，正弦的関数の特徴付け（対称ずらし・和性質）(8.54) に現れた $r_1^{(1)}$ と $r_{-1}^{(2)}$ とで，次のように関係付けると，閉性関係式 (8.77) が満たされる:

$$\begin{aligned}
r_0^{(2)}&=r_1^{(1)}, & r_0^{(1)}&=2r_1^{(0)},\\
\varepsilon^{-1}r_1^{(0)}&=v_{2,0}+v_{1,1}, & \varepsilon^{-2}r_0^{(0)}&=-v_{2,0}\,v_{1,1},\\
\varepsilon^{-1}r_{-1}^{(1)}&=v_{1,0}+v_{0,1}, & \varepsilon^{-2}r_{-1}^{(0)}&=-v_{2,0}\,v_{0,1}.
\end{aligned}$$

$v_{0,0}$ は出てこないことに注意しよう．これらを使うと $\alpha_\pm(\mathcal{H})$ の具体形が計算できる．このように，シュレーディンガー表示で可解な dQM の方程式の，正弦的座標のハイゼンベルグ演算子も閉じた形で得られることが示された．

8.4.3 双対閉性関係式

双対閉性関係式は，閉性関係式 (3.4), (8.77) と同じ形を持ち，ハミルトニア

ン $\mathcal{H}$ ($\widetilde{\mathcal{H}}$) と正弦的座標 $\eta(x)$ の役割が交換したものである:

$$[\eta,[\eta,\mathcal{H}]\,]=\mathcal{H}\,R_0^{\rm dual}(\eta)+[\eta,\mathcal{H}]\,R_1^{\rm dual}(\eta)+R_{-1}^{\rm dual}(\eta), \tag{8.81}$$

$$[\eta,[\eta,\widetilde{\mathcal{H}}]\,]=\widetilde{\mathcal{H}}\,R_0^{\rm dual}(\eta)+[\eta,\widetilde{\mathcal{H}}]\,R_1^{\rm dual}(\eta)+R_{-1}^{\rm dual}(\eta). \tag{8.82}$$

ここで，$R_i^{\rm dual}(z)$ はこれから決定する多項式である．以下で，双対閉性関係式は，正弦的座標 $\eta(x)$ の多項式を勝手な次数の別の多項式に写すような‘ハミルトニアン’ $\widetilde{\mathcal{H}}$ すべて（つまり可解とは限らない）に特徴的な性質であることを示そう．従って，その動力学的内容は，閉性関係式ほど強い制限にならない．例外は，可解な rdQM の場合である．この場合は，8.2 節で見たように，双対性（多項式）が非常に重要な役割を果たし，閉性関係式と双対閉性関係式が同等の役割を果たす．ポテンシャル関数 $V_\pm(x)$ に何の制限も付け加えていない‘ハミルトニアン’，$\widetilde{\mathcal{H}}=\varepsilon\Big(V_+(x)(e^{\beta p}-1)+V_-(x)(e^{-\beta p}-1)\Big)$ を，(8.82) に代入すると，それが次の 3 つの方程式と同値になる:

$$\begin{aligned}
\big(\eta(x)-\eta(x-i\beta)\big)^2&=R_0^{\rm dual}\big(\eta(x-i\beta)\big)\\
&\qquad+\big(\eta(x)-\eta(x-i\beta)\big)R_1^{\rm dual}\big(\eta(x-i\beta)\big),\\
\big(\eta(x)-\eta(x+i\beta)\big)^2&=R_0^{\rm dual}\big(\eta(x+i\beta)\big)\\
&\qquad+\big(\eta(x)-\eta(x+i\beta)\big)R_1^{\rm dual}\big(\eta(x+i\beta)\big),\\
0&=-\varepsilon\big(V_+(x)+V_-(x)\big)R_0^{\rm dual}\big(\eta(x)\big)+R_{-1}^{\rm dual}\big(\eta(x)\big).
\end{aligned}$$

これらから，

$$\begin{aligned}
R_1^{\rm dual}\big(\eta(x)\big)&=\big(\eta(x-i\beta)-\eta(x)\big)+\big(\eta(x+i\beta)-\eta(x)\big),\\
R_0^{\rm dual}\big(\eta(x)\big)&=-\big(\eta(x-i\beta)-\eta(x)\big)\big(\eta(x+i\beta)-\eta(x)\big),\\
R_{-1}^{\rm dual}\big(\eta(x)\big)&=\varepsilon\big(V_+(x)+V_-(x)\big)R_0^{\rm dual}(\eta(x)),
\end{aligned}$$

が得られる．正弦的座標の特徴的性質 (8.54)–(8.55) を用いると，$R_1^{\rm dual}(z)$ と $R_0^{\rm dual}(z)$ が，それぞれ z の 1 次と 2 次の多項式として定まる:

$$\begin{aligned}
R_1^{\rm dual}(z)&=r_1^{(1)}z+r_{-1}^{(2)},\\
R_0^{\rm dual}(z)&=r_1^{(1)}z^2+2r_{-1}^{(2)}z-\eta(-i\beta)\eta(i\beta).
\end{aligned}$$

$V_\pm$ の具体形 (8.52)–(8.53) を代入して

$$R_{-1}^{\rm dual}(z)=\varepsilon\Big(v_{0,0}+\sum_{k=1}^{2}(v_{k,0}+v_{k-1,1})z^k\Big)=r_1^{(0)}z^2+r_{-1}^{(1)}z+\varepsilon v_{0,0}, \tag{8.83}$$

となる．$D(0)=0$ の境界条件を満たすために，$v_{0,0}=-\eta(-1)v_{0,1}$ が必要で，これから，$\varepsilon v_{0,0}=\eta(1)\eta(-1)B(0)$ が帰結される．詳細は，[29] の (4.104)–(4.106) を参照.

8.5 Askey-Wilson 代数

この節では，Askey-Wilson 代数[63], [69]~[71]として知られているものが，より一般的に，離散量子力学での閉性関係式 (3.4) および双対閉性関係式 (8.81) と同値であることを示そう．これは，実数ずらしおよび純虚数ずらしの両方の場合の可解方程式系について成り立つ．閉性関係式および双対閉性関係式の二重の交換子を単純に展開して，2 つの演算子 $\mathcal{H}$ と η との作る 3 次の関係式を得る:

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^2\eta-(2+r_1^{(1)})\mathcal{H}\eta\mathcal{H}+\eta\mathcal{H}^2-r_1^{(0)}(\mathcal{H}\eta+\eta\mathcal{H})-r_0^{(0)}\eta\\&\quad=r_{-1}^{(2)}\mathcal{H}^2+r_{-1}^{(1)}\mathcal{H}+r_{-1}^{(0)},\end{aligned}\tag{8.84}$$

$$\begin{aligned}&\eta^2\mathcal{H}-(2+r_1^{(1)})\eta\mathcal{H}\eta+\mathcal{H}\eta^2-r_{-1}^{(2)}(\eta\mathcal{H}+\mathcal{H}\eta)+\eta(-i\beta)\eta(i\beta)\mathcal{H}\\&\quad=r_1^{(0)}\eta^2+r_{-1}^{(1)}\eta+\varepsilon v_{0,0}.\end{aligned}\tag{8.85}$$

その作り方から，閉性関係式は η について高々 1 次で，$\mathcal{H}$ に関して高々 2 次である．(8.84) の左辺に η を含む項をすべて集め，右辺は，$\mathcal{H}$ のみを含む．それは，$R_{-1}(\mathcal{H})$ である．同様に (8.85) の左辺に $\mathcal{H}$ を含む項をすべて集め，右辺は η のみを含む．それは，$R_{-1}^{\text{dual}}(\eta)$ (8.83) である．(8.85) の左辺に出てくる $\eta(-i\beta)\eta(i\beta)$ は，パラメタで演算子ではないことに注意しよう．

Askey-Wilson 代数は，多くの異なった表現[63], [69]~[71]を持っている．元々のものは Zhedanov[69]による．ここでは，[70], [71] に従って，少し一般化されたものを記そう．Askey-Wilson 代数は 3 つの元，K_1, K_2, K_3 で生成される:

$$[K_1,K_2]=K_3,\tag{8.86}$$

$$\begin{aligned}[K_3,K_1]&=2\rho K_1K_2K_1+a_2(K_1K_2+K_2K_1)\\&\quad+a_1K_1^2+c_2K_2+dK_1+g_2,\end{aligned}\tag{8.87}$$

$$\begin{aligned}[K_2,K_3]&=2\rho K_2K_1K_2+a_1(K_2K_1+K_1K_2)\\&\quad+a_2K_2^2+c_1K_1+dK_2+g_1.\end{aligned}\tag{8.88}$$

交換子を展開して，K_3 を消去すると次の形に帰着される:

$$\begin{aligned}&K_1^2K_2+2(\rho-1)K_1K_2K_1+K_2K_1^2+a_2(K_1K_2+K_2K_1)+c_2K_2\\&\quad=-a_1K_1^2-dK_1-g_2,\end{aligned}\tag{8.89}$$

$$\begin{aligned}&K_2^2K_1+2(\rho-1)K_2K_1K_2+K_1K_2^2+a_1(K_2K_1+K_1K_2)+c_1K_1\\&\quad=-a_2K_2^2-dK_2-g_1.\end{aligned}\tag{8.90}$$

Terwilliger[63]によるもう一つの表現は，2 つの独立な元 A と $A^\times$ で生成される:

$$A^2A^\times-\beta_{\mathrm{T}}AA^\times A+A^\times A^2-\gamma(AA^\times+A^\times A)-\rho_{\mathrm{T}}A^\times$$

$$= \gamma^{\times} A^2 + \omega A + \eta_{\mathrm{T}}, \tag{8.91}$$

$$A^{\times 2}A - \beta_{\mathrm{T}} A^{\times} A A^{\times} + A A^{\times 2} - \gamma^{\times}(A^{\times}A + AA^{\times}) - \rho_{\mathrm{T}}^{\times} A$$
$$= \gamma A^{\times 2} + \omega A^{\times} + \eta_{\mathrm{T}}^{\times}. \tag{8.92}$$

生成元と係数の対応の表を載せよう:

文献 [70], [71]	文献 [63]	本書
K_1	A	$\mathcal{H}$
K_2	$A^{\times}$	η
$2(1-\rho)$	β_{T}	$2 + r_1^{(1)}$
$-a_2$	γ	$r_1^{(0)} = \varepsilon(v_{2,0} + v_{1,1})$
$-a_1$	$\gamma^{\times}$	$r_{-1}^{(2)} = \eta(-i\beta) + \eta(i\beta)$
$-c_2$	ρ_{T}	$r_0^{(0)} = -\varepsilon^2 v_{2,0} v_{1,1}$
$-c_1$	$\rho_{\mathrm{T}}^{\times}$	$-\eta(-i\beta)\eta(i\beta)$
$-d$	ω	$r_{-1}^{(1)} = \varepsilon(v_{1,0} + v_{0,1})$
$-g_2$	η_{T}	$r_{-1}^{(0)} = -\varepsilon^2 v_{2,0} v_{0,1}$
$-g_1$	$\eta_{\mathrm{T}}^{\times}$	$\varepsilon v_{0,0}$.

(8.93)

代数のすべての生成元と可換なカシミア演算子 Q, $[K_1, Q] = [K_2, Q] = [K_3, Q] = 0$ が [70] に与えられている:

$$\begin{aligned} Q &= K_1K_2K_1K_2 + K_2K_1K_2K_1 - (1-\rho)(K_1K_2^2K_1 + K_2K_1^2K_2) \\ &\quad + (2-\rho)(a_1K_1K_2K_1 + a_2K_2K_1K_2) + (1-\rho)(c_1K_1^2 + c_2K_2^2) \\ &\quad + (d - a_1a_2)(K_1K_2 + K_2K_1) \\ &\quad + \big((2-\rho)g_1 - a_2c_1\big)K_1 + \big((2-\rho)g_2 - a_1c_2\big)K_2. \end{aligned}$$

上の置き換え (8.93), $K_1 \to \mathcal{H}$, $K_2 \to \eta$ 等，をすると，カシミア演算子は単に定数になる[72]:

$$Q = \varepsilon^2(v_{1,1}v_{0,0} - v_{1,0}v_{0,1} - r_{-1}^{(2)} v_{2,0}v_{0,1}).$$

純代数的 (8.86)–(8.88) な見地からは，めざましい結果に見えるかも知れないが，量子力学では自明な結果である．1 次元の量子力学では，ハミルトニアンと可換な動力学的演算子は存在しない．従って，もし Q が $\mathcal{H}$ と可換であれば，それは定数でなければならない．

次に相違点について述べよう．最初の明白な違いは構造である．Askey-Wilson 代数 (8.86)–(8.88) あるいは (8.91)–(8.92) には，明白な構造が何もないが，閉性関係式 (3.4) は，$\eta(x)$ のハイゼンベルグ演算子解に導く．その正・負エネルギー部分は生成・消滅演算子を与える[21], [29], [30]．系の動力学的対称性代数を作るのは，ハミルトニアンと生成・消滅演算子であって[29], [30]，閉性・双対閉性関係式でもなければ，Askey-Wilson 代数でもない．[61] に示された q-

振動子代数は，このようにして得られた動力学的対称性代数の典型例である．

次に，Askey-Wilson 代数自身が，純虚数ずらし (idQM) の系と実数ずらし (rdQM) の系とで性格が異なる点を挙げよう．Askey-Wilson 代数を応用する主な舞台は，離散変数の直交多項式であろう．(q-)Racah 多項式が典型的な例である[6],[29]．これらの系の顕著な特徴は，双対多項式，$P_n(\eta(x)) = Q_x(\mathcal{E}(n))$, $x = 0,1,\ldots$, $n = 0,1,\ldots$ の存在である．双対性，$x \leftrightarrow n$, $\eta \sim \eta(x) \leftrightarrow \mathcal{E}(n) \sim \mathcal{H}$ が Askey-Wilson 代数における演算子の対（Leonard 対[62]と呼ばれる）K_1 と K_2 あるいは A と $A^\times$ の対称性に反映されている．Askey-Wilson 代数，あるいは閉性・双対閉性関係式が，この双対多項式の対の持つ種々の性質の解明に有用である[29],[63]．

次に，純虚数ずらしの離散量子力学 (idQM) に目を向けよう．この場合には，正弦的座標 $\eta(x)$ は $x \in (x_1, x_2)$ で，連続的な値（スペクトル）を取り，それは，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ が持つ半無限の離散的なスペクトルとはっきり異なる．固有多項式 $\widetilde{\mathcal{H}}P_n(\eta(x)) = \mathcal{E}(n)P_n(\eta(x))$ は連続なパラメタ x に依存し，双対多項式は存在しない．Askey-Wilson 多項式および Wilson 多項式が典型的な例である[6],[30]．前節 8.4.3 節でも論じたとおり，可解性の本質的情報は閉性関係式 (3.4) に含まれており，双対閉性関係式がそれと同様の寄与をしているとは考えられない．従って，純虚数ずらしの場合には，Askey-Wilson 代数における $\mathcal{H}$ と η, あるいは K_1 と K_2, または A と $A^\times$ の見かけの対称性は，きわめて誤解を招きやすいと言えるであろう．

第 9 章
新しい直交多項式：離散量子力学

oQM の例（第 4 章）に続いて，2 階の差分方程式を満たす新しい直交多項式の導出を行う．元々の方程式の持つ離散対称性を用いて，そのパラメタのひねりから多項式型種解を作り，多重ダルブー変換（6.5 節）を行う．これにより，多添え字 Wilson, Askey-Wilson, Racah, q-Racah 多項式等が得られる．これらの多添え字多項式達は，元々の直交多項式と同様に，完全系を成すが，定数項からではなく，適当な正の次数 ($\ell \geq 1$) から始まるために，三項関係式を満たさない．有限な三重対角行列に基づいた，Racah, q-Racah 多項式等では，種解の性格が，idQM での例と全く異なるために，純虚数ずらし (idQM) と実数ずらし (rdQM) とを別々に論ずることにする．言うまでもないことだが，得られた多添え字直交多項式系に，クライン・アドラー変換を施して，次数に「穴」を空ければ更に新しい直交多項式系が得られる．

9.1 純虚数ずらし離散量子力学

本節では，idQM の 2 つの代表例，Wilson 多項式と Askey-Wilson 多項式の有理変形を行い，多添え字 Wilson および多添え字 Askey-Wilson 多項式を導出する[59]．多重ダルブー変換（6.5 節）に使う種解は，W および AW の持つ 4 つのパラメタのひねりから生成する．q 以外にパラメタのない q-Hermite 多項式は，通常のエルミート多項式と同様に，形状不変な多添え字直交多項式は存在しない．idQM の他の系の多添え字直交多項式の構成は，紙数の関係で本書では扱えない．

9.1.1 仮想状態解の構成

idQM で用いる仮想状態波動関数も，oQM のものとあまり変わりはない．必要な条件は，1. 6.2 節で導入した矩形領域 D_γ (6.41) 内に零点を持たない．2. 負のエネルギー $\tilde{\mathcal{E}}_j < 0$．3. 多項式型の解 等である．

次の条件を満たす x の解析関数 $V'(x)$ が存在すると仮定しよう:

$$V(x)V^*(x-i\gamma)=\alpha^2V'(x)V'^*(x-i\gamma),\qquad \alpha>0,$$
$$V(x)+V^*(x)=\alpha\big(V'(x)+V'^*(x)\big)-\alpha',\qquad \alpha'<0. \tag{9.1}$$

ここで，α と α' は定数である．すると 2 つのハミルトニアンの間に線形関係がある，

$$\mathcal{H}=\alpha\mathcal{H}'+\alpha', \tag{9.2}$$
$$\mathcal{H}'\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{V'(x)}\,e^{\gamma p}\sqrt{V'^*(x)}+\sqrt{V'^*(x)}\,e^{-\gamma p}\sqrt{V'(x)}-V'(x)-V'^*(x). \tag{9.3}$$

元々の $\mathcal{H}$ は半正定値なので，$\mathcal{H}'$ (9.3) は自明に正定値になり，2 乗可積分なゼロモードが存在しない．次のシュレーディンガー方程式:

$$\mathcal{H}\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x)=\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x)\ \ \text{or}\ \ \mathcal{H}'\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x)=\mathcal{E}'_{\mathrm{v}}\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x), \tag{9.4}$$
$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}\stackrel{\text{def}}{=}\alpha\mathcal{E}'_{\mathrm{v}}+\alpha',\quad \tilde{\phi}^*_{\mathrm{v}}(x)=\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x),$$

の次数 v の多項式型仮想状態波動関数 $\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x)$ ($\mathrm{v}\in\mathcal{V}$) が存在すると仮定しよう．そのような解は（擬）ゼロモード $\tilde{\phi}_0$ を含んでいるので，$\mathcal{H}$ のヒルベルト空間には属さない．ここで，$\mathcal{V}$ は仮想状態波動関数の準位の集合である．エネルギーが負であること $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}<0$ および $\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x)$ の解析的性質（9.1.3 節参照）なども要求する．

9.1.2 Wilson および Askey-Wilson 系の離散対称性

多重ダルブー変換（6.5 節）に使う仮想状態解を作るために，Wilson および Askey-Wilson 系の離散対称性を調べよう．まず，ポテンシャル関数 $V(x;\boldsymbol{\lambda})$ (6.16)–(6.17) は (a_1,a_2,a_3,a_4) の置換に関して不変なので，系は (a_1,a_2,a_3,a_4) について対称である．この対称性は，当然ながら基底状態固有関数 $\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})$ (6.32) および固有多項式 $\check{P}_n(x;\boldsymbol{\lambda})$ (6.22)–(6.23) にも存在する．

以後では次のようにパラメタを制限する:

$$a_1,a_2\in\mathbb{R}\ \ \text{or}\ \ a_2^*=a_1\ ;\quad a_3,a_4\in\mathbb{R}\ \ \text{or}\ \ a_4^*=a_3.$$

パラメタのひねり (twist) 演算子 $\mathfrak{t}^{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{t}^{\mathrm{II}}$ および 2 つの定数 $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I}}$, $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{II}}$,

$$\mathfrak{t}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}(1-\lambda_1,1-\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4),\quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I}}\stackrel{\text{def}}{=}(-\tfrac12,-\tfrac12,\tfrac12,\tfrac12),$$
$$\mathfrak{t}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}(\lambda_1,\lambda_2,1-\lambda_3,1-\lambda_4),\quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{II}}\stackrel{\text{def}}{=}(\tfrac12,\tfrac12,-\tfrac12,-\tfrac12),$$

を導入する．これらのひねり操作によって，変形されたポテンシャル関数 V'

$$V'^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}V\big(x;\mathfrak{t}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})\big),\quad V'^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}V\big(x;\mathfrak{t}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})\big),$$

を定義する．つまり，W では，

$$V'^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{(1-a_1+ix)(1-a_2+ix)(a_3+ix)(a_4+ix)}{2ix(2ix+1)},$$
$$V'^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{(a_1+ix)(a_2+ix)(1-a_3+ix)(1-a_4+ix)}{2ix(2ix+1)}.$$

AW では,

$$V'^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{(1-a_1^{-1}qe^{ix})(1-a_2^{-1}qe^{ix})(1-a_3e^{ix})(1-a_4e^{ix})}{(1-e^{2ix})(1-qe^{2ix})}$$
$$V'^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{(1-a_1e^{ix})(1-a_2e^{ix})(1-a_3^{-1}qe^{ix})(1-a_4^{-1}qe^{ix}))}{(1-e^{2ix})(1-qe^{2ix})}.$$

これらの V' 達 (9.1) は，2 つのハミルトニアンの線形関係 (9.2) を満たし，そこに現れる定数は

$$\alpha^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}1 & :\mathrm{W}\\ a_1a_2q^{-1} & :\mathrm{AW}\end{cases},\quad \alpha'^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}-(a_1+a_2-1)(a_3+a_4) & :\mathrm{W}\\ -(1-a_1a_2q^{-1})(1-a_3a_4) & :\mathrm{AW}\end{cases},$$
$$\alpha^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}1 & :\mathrm{W}\\ a_3a_4q^{-1} & :\mathrm{AW}\end{cases},\quad \alpha'^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}-(a_3+a_4-1)(a_1+a_2) & :\mathrm{W}\\ -(1-a_3a_4q^{-1})(1-a_1a_2) & :\mathrm{AW}\end{cases}.$$

(AW で $\alpha>0$ のためには，$a_1a_2>0$ と $a_3a_4>0$ が必要である．$\alpha'<0$ を満たすために，(9.7) にあるようにパラメタを制限する．) (9.4) を満たす仮想状態波動関数は次のようになる:

$$\tilde{\phi}_0^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\phi_0\big(x;\mathfrak{t}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})\big),$$
$$\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\phi_{\mathrm{v}}\big(x;\mathfrak{t}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})\big)=\tilde{\phi}_0^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{\xi}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})\quad(\mathrm{v}\in\mathcal{V}^{\mathrm{I}}),$$
$$\check{\xi}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\xi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{I}}\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\big)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\check{P}_{\mathrm{v}}\big(x;\mathfrak{t}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})\big)=P_{\mathrm{v}}\big(\eta(x);\mathfrak{t}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})\big),$$
$$\tilde{\phi}_0^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\phi_0\big(x;\mathfrak{t}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})\big),$$
$$\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\phi_{\mathrm{v}}\big(x;\mathfrak{t}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})\big)=\tilde{\phi}_0^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{\xi}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})\quad(\mathrm{v}\in\mathcal{V}^{\mathrm{II}}),$$
$$\check{\xi}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\xi_{\mathrm{v}}^{\mathrm{II}}\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\big)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\check{P}_{\mathrm{v}}\big(x;\mathfrak{t}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})\big)=P_{\mathrm{v}}\big(\eta(x);\mathfrak{t}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})\big).$$

仮想状態多項式 $\xi_{\mathrm{v}}(\eta;\boldsymbol{\lambda})$ は η の次数 v の多項式であり，'実' に選ぶ．$\tilde{\phi}_0^*(x;\boldsymbol{\lambda})=\tilde{\phi}_0(x;\boldsymbol{\lambda})$，$\check{\xi}_{\mathrm{v}}^*(x;\boldsymbol{\lambda})=\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})$． そのエネルギー $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\alpha\mathcal{E}'_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})+\alpha'$，$\mathcal{E}'_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}_{\mathrm{v}}\big(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big)$ は

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}-(a_1+a_2-\mathrm{v}-1)(a_3+a_4+\mathrm{v}) & :\mathrm{W}\\ -(1-a_1a_2q^{-\mathrm{v}-1})(1-a_3a_4q^{\mathrm{v}}) & :\mathrm{AW}\end{cases},$$
$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}-(a_3+a_4-\mathrm{v}-1)(a_1+a_2+\mathrm{v}) & :\mathrm{W}\\ -(1-a_3a_4q^{-\mathrm{v}-1})(1-a_1a_2q^{\mathrm{v}}) & :\mathrm{AW}\end{cases}.$$

$\alpha'(\boldsymbol{\lambda})=\tilde{\mathcal{E}}_0(\boldsymbol{\lambda})<0$ および $\mathrm{v}\geq 0$ で，次数 v に次のような制限が付く:

$$\mathrm{W}:\ \tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})<0\ \Leftrightarrow\ a_1+a_2>\mathrm{v}+1,$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})<0 \ \Leftrightarrow\ a_3+a_4>\mathrm{v}+1, \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AW}:\ &\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda})<0 \ \Leftrightarrow\ 0<a_1a_2<q^{\mathrm{v}+1},\\ &\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda})<0 \ \Leftrightarrow\ 0<a_3a_4<q^{\mathrm{v}+1}.\end{aligned} \tag{9.6}$$

準位集合 $\mathcal{V}^{\mathrm{I}}$ と $\mathcal{V}^{\mathrm{II}}$ を

$$\mathcal{V}^{\mathrm{I}}=\bigl\{1,2,\ldots,[\lambda_1+\lambda_2-1]'\bigr\},\quad \mathcal{V}^{\mathrm{II}}=\bigl\{1,2,\ldots,[\lambda_3+\lambda_4-1]'\bigr\},$$

のように選ぶ．ここで $[x]'$ は，x 未満の最大の整数を指す．次数 0 の状態は使わない（(9.22)–(9.23) 参照)．

後にカソラティアンの評価 (9.11) で使うので，次の関数 $(1\le j\le M)$ を定義しよう（$x_j^{(n)}$ は idQM のカソラティアンに関して (6.43) で定義されている):

$$\nu^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})}{\tilde{\phi}_0^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda})},\quad r_j^{\mathrm{I}}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda},M)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{\nu^{\mathrm{I}}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda})}{\nu^{\mathrm{I}}\bigl(x;\boldsymbol{\lambda}+(M-1)\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I}}\bigr)},$$

$$\nu^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})}{\tilde{\phi}_0^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda})},\quad r_j^{\mathrm{II}}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda},M)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{\nu^{\mathrm{II}}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda})}{\nu^{\mathrm{II}}\bigl(x;\boldsymbol{\lambda}+(M-1)\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{II}}\bigr)}.$$

具体形は

$$\begin{aligned}&r_j^{\mathrm{I}}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda},M)=\alpha^{\mathrm{I}}\bigl(\boldsymbol{\lambda}+(M-1)\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I}}\bigr)^{-\frac12(M-1)}\kappa^{\frac12(M-1)^2-(j-1)(M-j)}\\ &\quad\times\begin{cases}\displaystyle\prod_{k=1,2}(a_k-\tfrac{M-1}{2}+ix)_{j-1}(a_k-\tfrac{M-1}{2}-ix)_{M-j} & :\mathrm{W}\\ \displaystyle e^{ix(M+1-2j)}\prod_{k=1,2}(a_kq^{-\frac{M-1}{2}}e^{ix};q)_{j-1}(a_kq^{-\frac{M-1}{2}}e^{-ix};q)_{M-j} & :\mathrm{AW}\end{cases},\\ &r_j^{\mathrm{II}}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda},M)=\alpha^{\mathrm{II}}\bigl(\boldsymbol{\lambda}+(M-1)\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{II}}\bigr)^{-\frac12(M-1)}\kappa^{\frac12(M-1)^2-(j-1)(M-j)}\\ &\quad\times\begin{cases}\displaystyle\prod_{k=3,4}(a_k-\tfrac{M-1}{2}+ix)_{j-1}(a_k-\tfrac{M-1}{2}-ix)_{M-j} & :\mathrm{W}\\ \displaystyle e^{ix(M+1-2j)}\prod_{k=3,4}(a_kq^{-\frac{M-1}{2}}e^{ix};q)_{j-1}(a_kq^{-\frac{M-1}{2}}e^{-ix};q)_{M-j} & :\mathrm{AW}\end{cases}.\end{aligned}$$

9.1.3 多添え字 Wilson および Askey-Wilson 多項式の一般形

$M=M_{\mathrm{I}}+M_{\mathrm{II}}$ 個の仮想状態波動関数 $\mathcal{D}=\{d_1^{\mathrm{I}},\ldots,d_{M_{\mathrm{I}}}^{\mathrm{I}},d_1^{\mathrm{II}},\ldots,d_{M_{\mathrm{II}}}^{\mathrm{II}}\}$ を削除する．ここで d_j^{I} と d_j^{II} は，I および II 型の仮想状態の次数である．パラメタの範囲を更に次のように制限しよう:

$$\begin{aligned}\mathrm{W}:\ &\mathrm{Re}\,a_i>\tfrac12(\max_j\{d_j^{\mathrm{I}}\}+1)\ \ (i=1,2),\\ &\mathrm{Re}\,a_i>\tfrac12(\max_j\{d_j^{\mathrm{II}}\}+1)\ \ (i=3,4),\end{aligned} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AW}:\ &|a_i|<q^{\frac12(\max_j\{d_j^{\mathrm{I}}\}+1)}\ (i=1,2),\\ &|a_i|<q^{\frac12(\max_j\{d_j^{\mathrm{II}}\}+1)}\ (i=3,4),\quad a_1a_2,a_3a_4>0.\end{aligned} \tag{9.8}$$

これで負エネルギー条件 $\tilde{\mathcal{E}}_{\rm v}(\boldsymbol{\lambda})<0$ $({\rm v}\in\mathcal{D})$ は満たされる（(9.6) 参照）．パラメタ達は，$x_1\le x\le x_2$ で $\check{\xi}_{\rm v}(x;\boldsymbol{\lambda})\neq 0$ が満たされるように選ばれていると仮定しよう．例えば，パラメタ達を次のように選ぶと

- $a_1,a_2\in\mathbb{R},\ a_4^*=a_3,\quad \lambda_1+\lambda_2+2{\rm v}<\lambda_3+\lambda_4,\quad {\rm I},$
- $a_3,a_4\in\mathbb{R},\ a_2^*=a_1,\quad \lambda_3+\lambda_4+2{\rm v}<\lambda_1+\lambda_2,\quad {\rm II},$

実数の x について，$\check{\xi}_{\rm v}(x;\boldsymbol{\lambda})$ と $\check{\xi}_{\rm v}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$ との (q-) 超幾何関数の展開 (6.22)–(6.23) の各項が正になるので，これらは一定符号を持つ．

多重ダルブー変換後の固有関数 $\phi_{\mathcal{D}\,n}$ (6.70) を具体的に書き下そう．(6.70) 中のカソラティアンは次の 2 つの行列式に帰着される．それによって，分母多項式 $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ および多添え字直交多項式 $\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ がそれぞれ定義される:

$$
\begin{aligned}
&i^{\frac12 M(M-1)}\Big|\ \vec{X}^{(M)}_{d_1^{\rm I}}\ \cdots\ \vec{X}^{(M)}_{d^{\rm I}_{M_{\rm I}}}\ \ \vec{Y}^{(M)}_{d_1^{\rm II}}\ \cdots\ \vec{Y}^{(M)}_{d^{\rm II}_{M_{\rm II}}}\ \Big|\\
&=\varphi_M(x)\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\times A,
\end{aligned}
$$

$$
A=\begin{cases}
\prod_{k=3,4}\prod_{j=1}^{M_{\rm I}-1}(a_k-\frac{M-1}{2}+ix,a_k-\frac{M-1}{2}-ix)_j\\
\times\prod_{k=1,2}\prod_{j=1}^{M_{\rm II}-1}(a_k-\frac{M-1}{2}+ix,a_k-\frac{M-1}{2}-ix)_j & :{\rm W}\\
\prod_{k=3,4}\prod_{j=1}^{M_{\rm I}-1}a_k^{-j}q^{\frac14 j(j+1)}(a_kq^{-\frac{M-1}{2}}e^{ix},a_kq^{-\frac{M-1}{2}}e^{-ix};q)_j\\
\times\prod_{k=1,2}\prod_{j=1}^{M_{\rm II}-1}a_k^{-j}q^{\frac14 j(j+1)}(a_kq^{-\frac{M-1}{2}}e^{ix},a_kq^{-\frac{M-1}{2}}e^{-ix};q)_j & :{\rm AW}
\end{cases},
\tag{9.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&i^{\frac12 M(M+1)}\Big|\vec{X}^{(M+1)}_{d_1^{\rm I}}\ \cdots\ \vec{X}^{(M+1)}_{d^{\rm I}_{M_{\rm I}}}\ \vec{Y}^{(M+1)}_{d_1^{\rm II}}\ \cdots\ \vec{Y}^{(M+1)}_{d^{\rm II}_{M_{\rm II}}}\ \vec{Z}^{(M+1)}_n\Big|\\
&=\varphi_{M+1}(x)\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\times B,
\end{aligned}
$$

$$
B=\begin{cases}
\prod_{k=3,4}\prod_{j=1}^{M_{\rm I}}(a_k-\frac{M}{2}+ix,a_k-\frac{M}{2}-ix)_j\\
\times\prod_{k=1,2}\prod_{j=1}^{M_{\rm II}}(a_k-\frac{M}{2}+ix,a_k-\frac{M}{2}-ix)_j & :{\rm W}\\
\prod_{k=3,4}\prod_{j=1}^{M_{\rm I}}a_k^{-j}q^{\frac14 j(j+1)}(a_kq^{-\frac{M}{2}}e^{ix},a_kq^{-\frac{M}{2}}e^{-ix};q)_j\\
\times\prod_{k=1,2}\prod_{j=1}^{M_{\rm II}}a_k^{-j}q^{\frac14 j(j+1)}(a_kq^{-\frac{M}{2}}e^{ix},a_kq^{-\frac{M}{2}}e^{-ix};q)_j & :{\rm AW}
\end{cases}.
\tag{9.10}
$$

ここで，$\vec{X}^{(M)}_{\rm v}$ 等の定義は以下の通り $(1\le j\le M)$:

$$
\begin{aligned}
&\big(\vec{X}^{(M)}_{\rm v}\big)_j=r_j^{\rm II}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda},M)\check{\xi}^{\rm I}_{\rm v}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda}),\\
&\big(\vec{Y}^{(M)}_{\rm v}\big)_j=r_j^{\rm I}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda},M)\check{\xi}^{\rm II}_{\rm v}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda}),\\
&\big(\vec{Z}^{(M)}_n\big)_j=r_j^{\rm II}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda},M)r_j^{\rm I}(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda},M)\check{P}_n(x_j^{(M)};\boldsymbol{\lambda}).
\end{aligned}
\tag{9.11}
$$

2 つの多項式は ‘実’ である，$\check{\Xi}^*_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$, $\check{P}^*_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})$. 固有関数 (6.70) は，次のように書き表せる:

$$\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\alpha^{\rm I}(\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})^{\frac12 M_{\rm I}}\alpha^{\rm II}(\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})^{\frac12 M_{\rm II}}$$
$$\times\,\kappa^{-\frac14 M_{\rm I}(M_{\rm I}+1)-\frac14 M_{\rm II}(M_{\rm II}+1)+\frac52 M_{\rm I}M_{\rm II}}\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}), \qquad (9.12)$$

$$\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\rm def}{=}\frac{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})}{\sqrt{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}}, \qquad (9.13)$$
$$\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]}\stackrel{\rm def}{=}\boldsymbol{\lambda}+M_{\rm I}\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\rm I}+M_{\rm II}\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\rm II}. \qquad (9.14)$$

基底状態 $\phi_{\mathcal{D}\,0}$ は $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ で消滅される，$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\mathcal{D}\,0}(x;\boldsymbol{\lambda})=0$. 構成から $\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ は $x_1\le x\le x_2$ で正定値である．$\eta(x)$, $r_j(x;\boldsymbol{\lambda},M)$, $\varphi_M(x)$ および行列式の諸性質を用いて，この 2 つの多項式 $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x)$ (9.9) と $\check{P}_{\mathcal{D},n}(x)$ (9.10) とが正弦的座標 $\eta(x)$ の多項式であることを示すことができる:

$$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\rm def}{=}\Xi_{\mathcal{D}}\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\big),\quad \check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\rm def}{=}P_{\mathcal{D},n}\big(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}\big).$$

そしてその次数は，それぞれ ℓ と $\ell+n$ である（(9.9)–(9.10) 参照）．ここで次数 ℓ は

$$\ell\stackrel{\rm def}{=}\sum_{j=1}^{M_{\rm I}}d_j^{\rm I}+\sum_{j=1}^{M_{\rm II}}d_j^{\rm II}-\tfrac12 M_{\rm I}(M_{\rm I}-1)-\tfrac12 M_{\rm II}(M_{\rm II}-1)+M_{\rm I}M_{\rm II}.$$

パラメタ達は $x_1\le x\le x_2$ で $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\neq 0$ および $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\neq 0$ となるように選ばれていると仮定しよう．このことから，$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x\mp i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})\neq 0$ $(x_1\le x\le x_2)$ を示すことができる．最低次の多添え字直交多項式 $\check{P}_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})$ はパラメタを $\boldsymbol{\lambda}\to\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}$ のようにずらした分母多項式 $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ に関係付けられる:

$$\check{P}_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})=A\,\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}). \qquad (9.15)$$

ここで比例係数 A は [59] の (A.1) に記した．M 回の $(s=M)$ 仮想状態削除の後でのポテンシャル関数 $V_{\mathcal{D}}$ (6.74) は分母多項式によって表される:

$$V_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})=V(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})\,\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\gamma;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}. \qquad (9.16)$$

直交関係式 (6.68) $(n,m=0,1,2,\ldots)$ は

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\,\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})^2\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})=h_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})\delta_{nm},$$
$$h_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})=h_n(\boldsymbol{\lambda})\kappa^{\frac12 M_{\rm I}(M_{\rm I}+1)+\frac12 M_{\rm II}(M_{\rm II}+1)-5M_{\rm I}M_{\rm II}}$$
$$\times\,\alpha^{\rm I}(\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})^{-M_{\rm I}}\alpha^{\rm II}(\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})^{-M_{\rm II}}$$
$$\times\prod_{j=1}^{M_{\rm I}}\big(\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})-\tilde{\mathcal{E}}_{d_j^{\rm I}}(\boldsymbol{\lambda})\big)\cdot\prod_{j=1}^{M_{\rm II}}\big(\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})-\tilde{\mathcal{E}}_{d_j^{\rm II}}(\boldsymbol{\lambda})\big).$$

元々の系の形状不変性は，変形系に受け継がれる．演算子 $\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})$ と

$\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ とが 2 つのハミルトニアン $\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{H}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})$ とを絡み合わせる:

$$\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\mathcal{E}}_{d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger = \mathcal{H}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\mathcal{E}}_{d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}).$$

絡み合わせの演算子がゼロモードを持たないことが重要である．それで，2 つのハミルトニアンの固有状態が 1 : 1 に写される．言い換えると，2 つのハミルトニアン $\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{H}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})$ とは，正確に等スペクトルである．[73] の §4 と同じ議論によって，$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})$ の形状不変性が $\mathcal{H}_{d_1}(\boldsymbol{\lambda})$, $\mathcal{H}_{d_1 d_2}(\boldsymbol{\lambda})$, $\cdots$ に受け継がれることが判る．これより $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})$ は形状不変である:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger = \kappa\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^\dagger\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) + \mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}).$$

形状不変性より，$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ との固有関数 $\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ への作用が

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \kappa^{\frac{M}{2}}f_n(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\mathcal{D}\,n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}),$$
$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\phi_{\mathcal{D}\,n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = \kappa^{-\frac{M}{2}}b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda}),$$

のようになる．多添え字直交多項式に作用する前方および後方ずらし演算子は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mathcal{D}}\,(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^{-1}\circ\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\circ\psi_{\mathcal{D}}\,(x;\boldsymbol{\lambda})\\
&= \frac{i}{\varphi(x)\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})}\Big(\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})e^{\frac{\gamma}{2}p}\\
&\qquad\qquad - \check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})e^{-\frac{\gamma}{2}p}\Big),\\
\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mathcal{D}}\,(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\circ\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\circ\psi_{\mathcal{D}}\,(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\\
&= \frac{-i}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}\Big(V(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\mathrm{I}},M_{\mathrm{II}}]})\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})e^{\frac{\gamma}{2}p}\\
&\qquad - V^*(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\mathrm{I}},M_{\mathrm{II}}]})\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})e^{-\frac{\gamma}{2}p}\Big)\varphi(x),\end{aligned}$$

と定義され，固有多項式 $\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ への作用は

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = f_n(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}), \tag{9.17}$$
$$\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = b_{n-1}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}), \tag{9.18}$$

となる．相似変換したハミルトニアンには根号は現れない:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\circ\mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\circ\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\\
&= V(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\mathrm{I}},M_{\mathrm{II}}]})\,\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}\Big(e^{\gamma p} - \frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\gamma;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}\Big)\\
&\quad + V^*(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\mathrm{I}},M_{\mathrm{II}}]})\,\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}\Big(e^{-\gamma p} - \frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\gamma;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}\Big).\end{aligned} \tag{9.19}$$

多添え字直交多項式 $\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ が，その固有多項式になる:

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}). \tag{9.20}$$

他の絡み合わせ関係式は

$$\kappa^{\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\mathcal{A}_{d_1\ldots d_s}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\kappa^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}_{d_1\ldots d_s}(\boldsymbol{\lambda})^{\dagger}=\mathcal{A}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})^{\dagger}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}).$$

(6.65)（$s\to s+1$ として）に出てくる $\hat{V}_{d_1\ldots d_{s+1}}$ は，

$$\hat{V}_{d_1\ldots d_{s+1}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{\Xi_{d_1\ldots d_s}(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{d_1\ldots d_s}(x-i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}\frac{\Xi_{d_1\ldots d_{s+1}}(x-i\gamma;\boldsymbol{\lambda})}{\Xi_{d_1\ldots d_{s+1}}(x;\boldsymbol{\lambda})}$$
$$\times\begin{cases}\alpha^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\lambda}^{[s_{\mathrm{I}},s_{\mathrm{II}}]})V'^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda}^{[s_{\mathrm{I}},s_{\mathrm{II}}]}) & : d_{s+1}\text{ は I 型}\\ \alpha^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\lambda}^{[s_{\mathrm{I}},s_{\mathrm{II}}]})V'^{\mathrm{II}}(x;\boldsymbol{\lambda}^{[s_{\mathrm{I}},s_{\mathrm{II}}]}) & : d_{s+1}\text{ は II 型}\end{cases}, \tag{9.21}$$

となる．ここで，s_{I} と s_{II} は $\{d_1,\ldots,d_s\}$ 中の I と II の状態の数である．

$d_j\geq 1$ としてはあるが，$d_j=0$ の状態を使うことに何ら問題はない．次数 0 の状態を使うことは，$M-1$ 個の仮想状態削除に対応するだけである:

$$\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\Big|_{d^{\mathrm{I}}_{M_{\mathrm{I}}}=0}=A\,\check{P}_{\mathcal{D}',n}(x;\boldsymbol{\lambda}+\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I}}),$$
$$\mathcal{D}'=\{d^{\mathrm{I}}_1-1,\ldots,d^{\mathrm{I}}_{M_{\mathrm{I}}-1}-1,d^{\mathrm{II}}_1+1,\ldots,d^{\mathrm{II}}_{M_{\mathrm{II}}}+1\}, \tag{9.22}$$
$$\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\Big|_{d^{\mathrm{II}}_{M_{\mathrm{II}}}=0}=B\,\check{P}_{\mathcal{D}',n}(x;\boldsymbol{\lambda}+\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{II}}),$$
$$\mathcal{D}'=\{d^{\mathrm{I}}_1+1,\ldots,d^{\mathrm{I}}_{M_{\mathrm{I}}}+1,d^{\mathrm{II}}_1-1,\ldots,d^{\mathrm{II}}_{M_{\mathrm{II}}-1}-1\}. \tag{9.23}$$

比例係数 A と B は [59] の (A.2), (A.3) に記してある．これらは (2.19), (2.20), 等を用いて示せる．(9.15) から，分母多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}$ も同様に振る舞うことが判る．これが，$d_j\geq 1$ と制限した理由である．

既に多添え字ラゲールおよびヤコビ多項式で見たように[40]，異なる集合 $\mathcal{D}$ から得られる 2 つの系が同値になることがある．つまり，異なる集合 $\mathcal{D}$ に対応する分母多項式が互いに比例している．例えば，I 型の仮想状態を k 個削除するもの，$\mathcal{D}_1=\{m^{\mathrm{I}},(m+1)^{\mathrm{I}},\ldots,(m+k-1)^{\mathrm{I}}\}$ と，II 型の仮想状態を m 個削除するもの $\mathcal{D}_2=\{k^{\mathrm{II}},(k+1)^{\mathrm{II}},\ldots,(k+m-1)^{\mathrm{II}}\}$ とが関係している:

$$\check{\Xi}_{\mathcal{D}_1}(x;\boldsymbol{\lambda}+m\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{II}})=A\,\check{\Xi}_{\mathcal{D}_2}(x;\boldsymbol{\lambda}+k\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I}})\quad(k,m\geq 1).$$

この比例係数 A は [59] の (A.1) に与えた．このことと (9.16) から

$$V_{\mathcal{D}_1}(x;\boldsymbol{\lambda}+m\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{II}})=V_{\mathcal{D}_2}(x;\boldsymbol{\lambda}+k\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I}})$$

が得られる．これ故，2 つの系はパラメタをずらすことで同値になる．同じ多項式系に導く $\mathcal{D}$ の同値類の分類は，面白い問題である[74], [75]．

I 型のみ（$M_{\mathrm{I}}=M$, $M_{\mathrm{II}}=0$, $\mathcal{D}=\{d_1,\ldots,d_M\}$）の場合には，(9.9) や

(9.10) の表式は簡単になる:

$$\mathrm{W}_\gamma[\check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_1},\ldots,\check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_M}](x;\boldsymbol{\lambda})=\varphi_M(x)\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}), \tag{9.24}$$

$$\begin{aligned}
&\nu^{\mathrm{I}}(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\mathrm{I}})^{-1}\mathrm{W}_\gamma[\check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_1},\ldots,\check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_M},\nu^{\mathrm{I}}\check{P}_n](x;\boldsymbol{\lambda})\\
&=\varphi_{M+1}(x)\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\\
&=i^{\frac{1}{2}M(M+1)}\\
&\times\begin{vmatrix}
\check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_1}(x^{(M+1)}_1;\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & \check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_M}(x^{(M+1)}_1;\boldsymbol{\lambda}) & r^{\mathrm{I}}_1(x^{(M+1)}_1)\check{P}_n(x^{(M+1)}_1;\boldsymbol{\lambda})\\
\check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_1}(x^{(M+1)}_2;\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & \check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_M}(x^{(M+1)}_2;\boldsymbol{\lambda}) & r^{\mathrm{I}}_2(x^{(M+1)}_2)\check{P}_n(x^{(M+1)}_2;\boldsymbol{\lambda})\\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\
\check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_1}(x^{(M+1)}_{M+1};\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & \check{\xi}^{\mathrm{I}}_{d_M}(x^{(M+1)}_{M+1};\boldsymbol{\lambda}) & r^{\mathrm{I}}_{M+1}(x^{(M+1)}_{M+1})\check{P}_n(x^{(M+1)}_{M+1};\boldsymbol{\lambda})
\end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{9.25}$$

ここで，$r^{\mathrm{I}}_j(x)=r^{\mathrm{I}}_j(x;\boldsymbol{\lambda},M+1)$. II 型のみ ($M_{\mathrm{I}}=0$, $M_{\mathrm{II}}=M$) の場合も同様である．

9.1.4 多添え字 Wilson 多項式および Askey-Wilson 多項式の具体形

最も簡単な $M=1$ の公式の詳細を，以下に述べよう．対称性から，I 型のみに限り，添え字 I は略す．ℓ 次の仮想状態波動関数 $\Xi_\ell(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})\equiv\xi_\ell(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})$ を使って変形する．簡単のため，パラメタはすべて実としよう．まず 1 添え字 Wilson 多項式では，(9.5) 等より

$$\begin{aligned}
&\ell+1<a_1+a_2,\quad a_1+a_2+2\ell<a_3+a_4,\\
&0<1-a_1+a_3,\quad 0<1-a_1+a_4,
\end{aligned}$$

と取ろう．すると

$$\begin{aligned}
\xi_\ell(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})&=(2-a_1-a_2)_\ell(1-a_1+a_3)_\ell(1-a_1+a_4)_\ell\\
&\quad\times{}_4F_3\Bigl(\begin{matrix}-\ell,\,\ell+1-a_1-a_2+a_3+a_4,\,1-a_1+ix,\,1-a_1-ix\\2-a_1-a_2,\,1-a_1+a_3,\,1-a_1+a_4\end{matrix}\Bigm|1\Bigr),
\end{aligned}$$

は定符号になる．1 添え字 Wilson 多項式は，(9.25) を $M=1$ で評価して，

$$\begin{aligned}
&\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})\\
&=\frac{i}{2x}\Bigl(\check{\xi}_\ell(x+\tfrac{i}{2};\boldsymbol{\lambda})(a_1-\tfrac{1}{2}+ix)(a_2-\tfrac{1}{2}+ix)\check{P}_n(x-\tfrac{i}{2};\boldsymbol{\lambda})\\
&\qquad-\check{\xi}_\ell(x-\tfrac{i}{2};\boldsymbol{\lambda})(a_1-\tfrac{1}{2}-ix)(a_2-\tfrac{1}{2}-ix)\check{P}_n(x+\tfrac{i}{2};\boldsymbol{\lambda})\Bigr),
\end{aligned}$$

となる．また，(9.15) より，$\check{P}_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})=A\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$, $A=\ell+1-a_1-a_2$ である．

次に 1 添え字 Askey-Wilson 多項式では，(9.6) 等よりパラメタを

$$0<a_1a_2<q^{\ell+1},\quad a_1a_2q^{2\ell}>a_3a_4,\quad qa_1^{-1}a_3<1,\quad qa_1^{-1}a_4<1,$$

と取ろう．すると

$$\xi_\ell(\eta(x);\boldsymbol{\lambda}) = q^{-n}a_1^n(q^2a_1^{-1}a_2^{-1}, qa_1^{-1}a_3, qa_1^{-1}a_4;q)_\ell \times {}_4\phi_3\Bigl(\begin{matrix} q^{-\ell},\ q^{\ell+1}a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_4,\ qa_1^{-1}e^{ix},\ qa_1^{-1}e^{-ix} \\ q^2a_1^{-1}a_2^{-1},\ qa_1^{-1}a_3,\ qa_1^{-1}a_4 \end{matrix}\Bigm| q;q\Bigr),$$

は定符号になる．1 添え字 Askey-Wilson 多項式は，(9.25) を $M=1$ で評価して，

$$\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \frac{i(a_1a_2)^{-1/2}q^{1/2}}{2\sin x} \times \Bigl(\check{\xi}_\ell(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})e^{-ix}(a_1q^{-\frac{1}{2}}e^{ix}, a_2q^{-\frac{1}{2}}e^{ix};q)\check{P}_n(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}) - \check{\xi}_\ell(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})e^{ix}(a_1q^{-\frac{1}{2}}e^{-ix}, a_2q^{-\frac{1}{2}}e^{-ix};q)\check{P}_n(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})\Bigr),$$

となる．また，(9.15) より，

$$\check{P}_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda}) = A\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}), \quad A = (a_1a_2q^{-\ell-1})^{-1/2}(1-a_1a_2q^{-\ell-1})$$

である．

1 添え字 Wilson および Askey-Wilson 多項式の満たす 2 階の差分方程式は，

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}),$$

$$\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} n(n+\sum_{j=1}^4 a_j - 1), & \text{W}, \\ (q^{-n}-1)(1-\prod_{j=1}^4 a_j\cdot q^{n-1}), & \text{AW}, \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} V(x;\boldsymbol{\lambda}+\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\text{I}})\,\frac{\check{\xi}_\ell(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}{\check{\xi}_\ell(x-i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}\Bigl(e^{\gamma p} - \frac{\check{\xi}_\ell(x-i\gamma;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}\Bigr) + V^*(x;\boldsymbol{\lambda}+\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{\text{I}})\,\frac{\check{\xi}_\ell(x-i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}{\check{\xi}_\ell(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}\Bigl(e^{-\gamma p} - \frac{\check{\xi}_\ell(x+i\gamma;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}\Bigr).$$

$\ell=1,2,3$, $n=0,1,2,3$ で，この方程式を検算するのを，練習問題としよう．方程式は代数的なものなので，パラメタの値に関係なく成り立つ．

9.1.5 多添え字直交多項式系のエルミート性（自己共役性）

ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ のエルミート性（自己共役性）について述べよう．6.2 節の関数 $V(x)$, $\phi_0(x)$ と $\check{\mathcal{R}}(x)$ は，それぞれ $V_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$, $\phi_{\mathcal{D}\,0}(x;\boldsymbol{\lambda}) \propto \psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})$ および $\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})/\check{P}_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})$ に対応する．関数 $G(x)$ (6.39) は，全体の乗法定数を除いて，

$$G(x) = \frac{V(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\text{I}},M_{\text{II}}]})\phi_0(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\text{I}},M_{\text{II}}]})^2}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})^2} \times \check{P}_{\mathcal{D},n}(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},m}(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}),$$

となり，

$$
\begin{aligned}
G(x)-G^*(x)&=V(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})\phi_0(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})^2\\
&\qquad\times\frac{\mathcal{P}(x)}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})}\times\frac{1}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})},\\
\mathcal{P}(x)&=\check{P}_{\mathcal{D},n}(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},m}(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})\\
&\qquad-\check{P}_{\mathcal{D},n}(x-i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},m}(x+i\tfrac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}
$$

が得られる．元々の系の結果 (6.42) と新しいパラメタ値域 (9.7) によって，この $V\phi_0^2$ 部分 $V(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})\phi_0(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})^2$ は矩形領域 D_γ ((6.41)) 内の極を持たない．関数 $\mathcal{P}(x)$ は，$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ で割れるので $\mathcal{P}(x)/\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})=i\varphi(x)\times(\eta(x)$ の多項式) となる．これより $G-G^*$ の起こりうる特異性は，$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ の零点に起因する．条件 (6.40) の左辺は，W については $G(x_1+ix)=G^*(x_1-ix)$, $G(x_2+ix)=0=G^*(x_2-ix)$，および AW については $G(x_1+ix)=G^*(x_1-ix)$, $G(x_2+ix)=G^*(x_2-ix)$ となるために，消える．ただし，積分経路上に特異点が存在しないことを仮定した．もし $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ が D_γ 内に零点を持たないならば，関数 $G-G^*$ は D_γ 内に極を持たず，条件 (6.40) が満たされる．もし $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ が D_γ 内に零点を持つならば，$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}^*=\check{\Xi}_{\mathcal{D}}$ と $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\neq 0$ $(x_1\leq x\leq x_2)$ のために，それらは複素共役対 $\alpha\pm i\beta$ $(x_1\leq\alpha\leq x_2,\ 0<\beta\leq\frac{1}{2}|\gamma|)$ として現れる．条件 (6.40) を満たすためには $G-G^*$ の留数の和がゼロにならねばならない．

$\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ 中の $V_{\mathcal{D}}+V_{\mathcal{D}}^*$ の項は，

$$
\begin{aligned}
&V_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})+V_{\mathcal{D}}^*(x;\boldsymbol{\lambda})\\
&=V(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\gamma;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}\\
&\quad+V^*(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})}\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+i\gamma;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})},
\end{aligned}
$$

となり，自己共役性には何の問題にもならない．区間 $x_1\leq x\leq x_2$ 内に起こりうる特異性は，(i) 端点 $x=x_1,x_2$ での $V(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})$ と $V^*(x;\boldsymbol{\lambda}^{[M_{\rm I},M_{\rm II}]})$, (ii) 分母の $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x\mp i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})$ の零点，(iii) 分母の $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$ の零点．(i) の場合には，特異性は元々の場合 $V(x;\boldsymbol{\lambda})+V^*(x;\boldsymbol{\lambda})$ と同様に相殺する．(ii) の場合には，$\check{\Xi}_{d_1\ldots d_s}(x;\boldsymbol{\lambda})\neq 0$, $\check{\Xi}_{d_1\ldots d_s}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\neq 0$ $(x_1\leq x\leq x_2)$ 等を用いて，$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x\mp i\frac{\gamma}{2};\boldsymbol{\lambda})\neq 0$ $(x_1\leq x\leq x_2)$ を示すことができる．(iii) の場合には，(6.76) と (9.21) が，分母の因子 $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$ が消えることを意味する．つまり，$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$ は特異性を生じない．

これより，もし $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ が D_γ 内に零点を持たないか，あるいは $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ の零点から来る留数が相殺するならば，ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ は矛盾無く定義されて，自己共役である．現在のところ，留数の相殺の一般的証明や $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ が矩形領域 D_γ 内に零点を持たないようにパラメタを制限する包括的な方法を持

ち合わせない．使う仮想状態の数 M が小さいときには，$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ が D_γ 内に零点を持たないようなパラメタ領域が存在することは数値計算で確認できる．

本節を終えるにあたって，いくつか注意をしておこう．多添え字直交多項式 $P_{\mathcal{D},n}(\eta(x))$ は，$\eta(x)$ の $\ell+n$ 次の多項式であるが，自己共役性が成り立つパラメタの値域では，x の直交域内に n 個の零点を持つ．この節の主結果は代数的なものであり，多項式を支配する差分方程式 (9.18)–(9.20) は，パラメタの値域に関係なく多添え字直交多項式を決定する．これは，もともとの W, AW 多項式を決定する方程式 (6.12) が代数的なものであり，パラメタの値域に一切よらないことに対応している．

9.2 実数ずらし離散量子力学

本節では，rdQM のうち最も一般的な，Racah および q-Racah 多項式の変形から得られる多添え字直交多項式を扱う[65]．oQM および idQM の場合と同様に，rdQM の多添え字直交多項式を作るためには，仮想状態解が必要になる．しかしながら，(q-)Racah のシュレーディンガー方程式は，有限次元三重対角行列の固有値問題であるので，次元と同じ数だけの固有ベクトル以外に方程式の解は存在しない．ここで用いるのは，パラメタをひねって作った新しい正定値ハミルトニアン $\mathcal{H}'$ (9.31) のシュレーディンガー方程式 (9.34) を，上の端点 $x=x_{\max}$ **以外のすべての点で満たす**，**仮想状態ベクトル**である．この状況は，仮想状態ベクトルの因子化 (9.35) に現れる擬ゼロモード $\tilde{\phi}_0(x)$ によって実現される．$\mathcal{H}'$ (9.31) は正定値なので，ゼロモードは存在しないが，因子化されたゼロモード方程式 (9.32) は，二項漸化式なので，上の端点 $x=x_{\max}$ まで完全に擬ゼロモード $\tilde{\phi}_0(x)$ を決めるが，$x=x_{\max}$ でのみ，ゼロモード方程式 (9.32) を満たさない．対応する多項式関数 $\check{\xi}(x)$ は，(9.36) によって問題なく定まる．

9.2.1 対称性と仮想状態ベクトル

R および qR のポテンシャル関数 $B(x)$, $D(x)$, (6.18), (6.19) は，3 つのパラメタ a, b, c について対称で，第 4 のパラメタ d (λ_4) が特別の役割を果たす．これに基づいてパラメタのひねり演算子 $\mathfrak{t}$ を導入しよう:

$$\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_4-\lambda_1+1, \lambda_4-\lambda_2+1, \lambda_3, \lambda_4), \quad \mathfrak{t}^2=\text{id}. \tag{9.26}$$

λ_1, あるいは λ_2 と λ_3 の役割を換えることも可能である．2 つの関数 $B'(x)$ と $D'(x)$ とを元々のポテンシャル関数 (6.18), (6.19) のパラメタひねりで

$$B'(x;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} B\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr), \quad D'(x;\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} D\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr),$$

のように導入する．つまり

$$B'(x;\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} -\dfrac{(x+d-a+1)(x+d-b+1)(x+c)(x+d)}{(2x+d)(2x+1+d)} & : \mathrm{R} \\ -\dfrac{(1-a^{-1}dq^{x+1})(1-b^{-1}dq^{x+1})(1-cq^x)(1-dq^x)}{(1-dq^{2x})(1-dq^{2x+1})} & : q\mathrm{R} \end{cases},$$

$$D'(x;\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} -\dfrac{(x+a-1)(x+b-1)(x+d-c)x}{(2x-1+d)(2x+d)} & : \mathrm{R} \\ -\dfrac{cdq}{ab}\dfrac{(1-aq^{x-1})(1-bq^{x-1})(1-c^{-1}dq^x)(1-q^x)}{(1-dq^{2x-1})(1-dq^{2x})} & : q\mathrm{R} \end{cases}.$$

正整数 M を一つ定めて，元々のパラメタの条件式 (6.19), (6.20) を保ちながら更に，次の条件を満たすようにパラメタを調節する:

$$\mathrm{R}: \quad d+M < a+b, \qquad q\mathrm{R}: \quad ab < dq^M.$$

後に M は，削除する仮想状態ベクトルの総数と同一視される．次の式は容易に確かめられる:

$$B(x;\boldsymbol{\lambda})D(x+1;\boldsymbol{\lambda}) = \alpha(\boldsymbol{\lambda})^2 B'(x;\boldsymbol{\lambda})D'(x+1;\boldsymbol{\lambda}), \tag{9.27}$$

$$B(x;\boldsymbol{\lambda}) + D(x;\boldsymbol{\lambda}) = \alpha(\boldsymbol{\lambda})\big(B'(x;\boldsymbol{\lambda}) + D'(x;\boldsymbol{\lambda})\big) + \alpha'(\boldsymbol{\lambda}), \tag{9.28}$$

$$B'(x;\boldsymbol{\lambda}) > 0 \quad (x = 0, 1, \ldots, x_{\max} + M - 1), \tag{9.29}$$

$$D'(x;\boldsymbol{\lambda}) > 0 \quad (x = 1, 2, \ldots, x_{\max}), \quad D'(0;\boldsymbol{\lambda}) = D'(x_{\max}+1;\boldsymbol{\lambda}) = 0. \tag{9.30}$$

上の B, D と B', D' の関係式は，idQM での V と V' との関係 (9.1) に対応している．ここで定数 $\alpha(\boldsymbol{\lambda})$ は正で，$\alpha'(\boldsymbol{\lambda})$ は負である:

$$0 < \alpha(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} 1 & : \mathrm{R} \\ abd^{-1}q^{-1} & : q\mathrm{R} \end{cases},$$

$$0 > \alpha'(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} -c(a+b-d-1) & : \mathrm{R} \\ -(1-c)(1-abd^{-1}q^{-1}) & : q\mathrm{R} \end{cases}.$$

上の関係式 (9.27)–(9.30) は，ひねったパラメタで作った仮想ハミルトニアン $\mathcal{H}'$,

$$\mathcal{H}'(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}\big(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big) = -\sqrt{B'(x)}\,e^{\partial}\sqrt{D'(x)} - \sqrt{D'(x)}\,e^{-\partial}\sqrt{B'(x)} + B'(x) + D'(x), \tag{9.31}$$

が良く定義できて（簡単のため $\boldsymbol{\lambda}$ 依存性は隠した），元々のハミルトニアンと線形関係にあることを意味する:

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{H}\big(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\big) + \alpha'(\boldsymbol{\lambda}).$$

これはまた $\mathcal{H}(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda}))$ が正定値であり，ゼロモードを持たないことを意味する．言い換えると，二項漸化式

$$\mathcal{A}\big(\mathsf{t}(\boldsymbol{\lambda})\big)=\sqrt{B'(x;\boldsymbol{\lambda})}-e^{\partial}\sqrt{D'(x;\boldsymbol{\lambda})},$$
$$\mathcal{A}\big(\mathsf{t}(\boldsymbol{\lambda})\big)\tilde{\phi}_0(x;\boldsymbol{\lambda})=0\quad(x=0,1,\ldots,x_{\max}-1), \tag{9.32}$$

は $x=0$ から $x=x_{\max}-1$ まで'解け'て，$\mathcal{H}\big(\mathsf{t}(\boldsymbol{\lambda})\big)$ の'擬ゼロモード'

$$\tilde{\phi}_0(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{\prod_{y=0}^{x-1}\frac{B'(y;\boldsymbol{\lambda})}{D'(y+1;\boldsymbol{\lambda})}}\qquad(x=0,1,\ldots,x_{\max}), \tag{9.33}$$

は，完全に定まるが，$x=x_{\max}$ では，境界条件

$$B'(x_{\max};\boldsymbol{\lambda})\neq 0,\quad \mathcal{A}\big(\mathsf{t}(\boldsymbol{\lambda})\big)\tilde{\phi}_0(x;\boldsymbol{\lambda})\neq 0\ \ (x=x_{\max})$$

のために，'ゼロモード方程式'(9.32) が満たされていない．

新しいシュレーディンガー方程式

$$\mathcal{H}'(\boldsymbol{\lambda})\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}'_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda}), \tag{9.34}$$

は，元々の (q-)Racah 系と同様に，因子化型

$$\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\tilde{\phi}_0(x;\boldsymbol{\lambda})\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda}), \tag{9.35}$$

で，$x=x_{\max}$ 以外では'ほとんど解けた'ことになる．$\tilde{\phi}_0(x;\boldsymbol{\lambda})$ の具体形 (9.33) を使うと，$x=0,\ldots,x_{\max}-1$ の新しいシュレーディンガー方程式は

$$\begin{aligned}B'(x;\boldsymbol{\lambda})\big(\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})-\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})\big)+D'(x;\boldsymbol{\lambda})\big(\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})-\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x-1;\boldsymbol{\lambda})\big)\\ =\mathcal{E}'_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda}),\end{aligned} \tag{9.36}$$

のように書き直される．これは (q-)Racah 多項式の方程式と同じ形である．$x\in\mathbb{C}$ でのその解は，ひねったパラメタを持つ (q-)Racah 多項式 (6.25), (6.26) で与えられる:

$$\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\check{P}_{\mathrm{v}}\big(x;\mathsf{t}(\boldsymbol{\lambda})\big),\qquad \mathcal{E}'_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}_{\mathrm{v}}\big(\mathsf{t}(\boldsymbol{\lambda})\big).$$

そのような'解'の中で，負のエネルギーと一定の符号を持ったもの

$$\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})>0\ \ (x=0,1,\ldots,x_{\max},x_{\max}+1;\mathrm{v}\in\mathcal{V}), \tag{9.37}$$
$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})<0\ \ (\mathrm{v}\in\mathcal{V}), \tag{9.38}$$

は，**仮想状態ベクトル**: $\{\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x)\}$, $\mathrm{v}\in\mathcal{V}$ と呼ばれる．仮想状態ベクトルの準位集合は

$$\mathcal{V}=\{1,2,\ldots,\mathrm{v}_{\max}\},\ \ \mathrm{v}_{\max}=\min\big\{[\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4-1]',[\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4)]\big\},$$

であり，$[x]$ は x 以下の最大の整数，また $[x]'$ は x 未満の最大の整数を指す．0 状態は削除に使わない ((9.59))．負エネルギー条件 (9.38) は，$\mathrm{v}_{\max}\leq[\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4-1]'$ で満たされている．$\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ (9.37) の正値性を調べるため

に，その具体形を書き下そう：

$$\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}{}_4F_3\Bigl(\begin{matrix}-\mathrm{v},\,\mathrm{v}-a-b+c+d+1,\,-x,\,x+d\\ d-a+1,\,d-b+1,\,c\end{matrix}\Bigm|1\Bigr) & :\mathrm{R}\\ {}_4\phi_3\Bigl(\begin{matrix}q^{-\mathrm{v}},\,a^{-1}b^{-1}cdq^{\mathrm{v}+1},\,q^{-x},\,dq^{x}\\ a^{-1}dq,\,b^{-1}dq,\,c\end{matrix}\Bigm|q\,;q\Bigr) & :q\mathrm{R}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{v}}\frac{(-\mathrm{v},\mathrm{v}-a-b+c+d+1,-x,x+d)_k}{(d-a+1,d-b+1,c)_k}\frac{1}{k!} & :\mathrm{R}\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{v}}\frac{(q^{-\mathrm{v}},a^{-1}b^{-1}cdq^{\mathrm{v}+1},q^{-x},dq^{x};q)_k}{(a^{-1}dq,b^{-1}dq,c;q)_k}\frac{q^k}{(q;q)_k} & :q\mathrm{R}\end{cases}. \tag{9.39}$$

和の中の k 番目の各項は $2\,\mathrm{v}_{\max}\le\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4$ ならば非負である．仮想状態ベクトルの性質をまとめる：

$$\tilde{\phi}_0(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\phi_0\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr),$$
$$\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\phi_{\mathrm{v}}\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr)=\tilde{\phi}_0(x;\boldsymbol{\lambda})\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})\quad(\mathrm{v}\in\mathcal{V}),$$
$$\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\check{P}_{\mathrm{v}}\bigl(x;\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr),\quad \check{\xi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\xi_{\mathrm{v}}\bigl(\eta(x;\boldsymbol{\lambda});\boldsymbol{\lambda}\bigr),$$
$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})=\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x;\boldsymbol{\lambda})\quad(x=0,1,\ldots,x_{\max}-1),$$
$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x_{\max};\boldsymbol{\lambda})\neq\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x_{\max};\boldsymbol{\lambda}),\quad \mathcal{E}'_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}_{\mathrm{v}}\bigl(\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})\bigr),$$
$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})=\alpha(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{E}'_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\lambda})+\alpha'(\boldsymbol{\lambda})$$
$$=\begin{cases}-(c+\mathrm{v})(a+b-d-1-\mathrm{v}) & :\mathrm{R}\\ -(1-cq^{\mathrm{v}})(1-abd^{-1}q^{-1-\mathrm{v}}) & :q\mathrm{R}\end{cases},$$
$$\nu(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda})}{\tilde{\phi}_0(x;\boldsymbol{\lambda})}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(1-a)\Gamma(x+b)\Gamma(d-a+1)\Gamma(b-d-x)}{\Gamma(1-a-x)\Gamma(b)\Gamma(x+d-a+1)\Gamma(b-d)} & :\mathrm{R}\\ \dfrac{(a^{-1}q^{1-x},b,a^{-1}dq^{x+1},bd^{-1};q)_\infty}{(a^{-1}q,bq^{x},a^{-1}dq,bd^{-1}q^{-x};q)_\infty} & :q\mathrm{R}\end{cases}.$$

$\alpha'(\boldsymbol{\lambda})=\tilde{\mathcal{E}}_0(\boldsymbol{\lambda})<0$ となることに注意しよう．関数 $\nu(x;\boldsymbol{\lambda})$ は，関数関係式

$$\nu(x+1;\boldsymbol{\lambda})=\frac{B(x;\boldsymbol{\lambda})}{\alpha B'(x;\boldsymbol{\lambda})}\nu(x;\boldsymbol{\lambda}),\quad \nu(x-1;\boldsymbol{\lambda})=\frac{D(x;\boldsymbol{\lambda})}{\alpha D'(x;\boldsymbol{\lambda})}\nu(x;\boldsymbol{\lambda}) \tag{9.40}$$

を通じて，x または q^x の有理型関数に解析接続される．境界条件 $B(x_{\max};\boldsymbol{\lambda})=0$ により，この関数は区間 $x_{\max}+1\le x\le x_{\max}+M$ 内の整数値でゼロになる，$\nu(x;\boldsymbol{\lambda})=0$．負の整数値点では，ゼロでない有限の値を取る．

9.2.2　多添え字 (q-)Racah 多項式の構成

ここで，仮想状態を削除するクライン・アドラーの方法を用いて，(q-)Racah

多項式によって固有関数が記述される可解系の変形を行う．すべての固有値が，元のままであるので，この過程は **正確に等スペクトル変形**であり，ハミルトニアンの次元は変わらない．

仮想状態を 1 個削除する場合から始めて，基本的な公式を述べていこう．記述を簡単にするために，ここでは，$(\boldsymbol{\lambda})$ 依存性を露わに書くことは止めにする．

<u>仮想状態 1 個削除</u>

まず，ポテンシャル関数 $\hat{B}_{d_1}(x)$ と $\hat{D}_{d_1}(x)$ を仮想状態多項式 $\check{\xi}_{d_1}(x)$ $(d_1 \in \mathcal{V})$ を用いて定めて，元々のハミルトニアンを書き直す:

$$\hat{B}_{d_1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha B'(x)\frac{\check{\xi}_{d_1}(x+1)}{\check{\xi}_{d_1}(x)}, \quad \hat{D}_{d_1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha D'(x)\frac{\check{\xi}_{d_1}(x-1)}{\check{\xi}_{d_1}(x)}. \quad (9.41)$$

正値条件 $\hat{B}_{d_1}(x) > 0$ $(x = 0, 1, \ldots, x_{\max})$, $\hat{D}_{d_1}(0) = \hat{D}_{d_1}(x_{\max}+1) = 0$, $\hat{D}_{d_1}(x) > 0$ $(x = 1, 2, \ldots, x_{\max})$ および

$$B(x)D(x+1) = \hat{B}_{d_1}(x)\hat{D}_{d_1}(x+1),$$
$$B(x) + D(x) = \hat{B}_{d_1}(x) + \hat{D}_{d_1}(x) + \tilde{\mathcal{E}}_{d_1},$$

が成り立つ．2 番目の等式では，(9.36) を使った．元々のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{A}}_{d_1}^{\dagger}\hat{\mathcal{A}}_{d_1} + \tilde{\mathcal{E}}_{d_1},$$
$$\hat{\mathcal{A}}_{d_1} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\hat{B}_{d_1}(x)} - e^{\partial}\sqrt{\hat{D}_{d_1}(x)}, \quad \hat{\mathcal{A}}_{d_1}^{\dagger} = \sqrt{\hat{B}_{d_1}(x)} - \sqrt{\hat{D}_{d_1}(x)}\,e^{-\partial},$$

と書かれる．仮想状態ベクトル $\tilde{\phi}_{d_1}(x)$ は $\hat{\mathcal{A}}_{d_1}$ によって，上の端点だけを除いてほとんど消される:

$$\hat{\mathcal{A}}_{d_1}\tilde{\phi}_{d_1}(x) = 0 \quad (x = 0, 1, \ldots, x_{\max}-1), \quad \hat{\mathcal{A}}_{d_1}\tilde{\phi}_{d_1}(x_{\max}) \neq 0.$$

証明は単純で，(9.41) と (9.33) を直接代入すればよい．

次に，2 つの行列 $\hat{\mathcal{A}}_{d_1}^{\dagger}$ と $\hat{\mathcal{A}}_{d_1}$ との順序を変えて，新しいハミルトニアン $\mathcal{H}_{d_1}$ を定義する．新しい固有ベクトル $\phi_{d_1 n}(x)$ と新しい仮想状態ベクトルの集合 $\tilde{\phi}_{d_1 \mathrm{v}}(x)$ が得られる:

$$\mathcal{H}_{d_1} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{d_1}\hat{\mathcal{A}}_{d_1}^{\dagger} + \tilde{\mathcal{E}}_{d_1},$$
$$\mathcal{H}_{d_1} = (\mathcal{H}_{d_1\, x,y}) \quad (x, y = 0, 1, \ldots, x_{\max}),$$
$$\phi_{d_1 n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{d_1}\phi_n(x) \ (x = 0, 1, \ldots, x_{\max}; n = 0, 1, \ldots, n_{\max}), \quad (9.42)$$
$$\tilde{\phi}_{d_1 \mathrm{v}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{d_1}\tilde{\phi}_{\mathrm{v}}(x) + \delta_{x, x_{\max}}\varphi_{d_1 \mathrm{v}} \quad (x = 0, 1, \ldots, x_{\max}; \mathrm{v} \in \mathcal{V}\backslash\{d_1\}),$$
$$\varphi_{d_1 \mathrm{v}} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\sqrt{\alpha B'(x_{\max})}\,\tilde{\phi}_0(x_{\max})}{\sqrt{\check{\xi}_{d_1}(x_{\max})\check{\xi}_{d_1}(x_{\max}+1)}}\check{\xi}_{d_1}(x_{\max})\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x_{\max}+1).$$
$$(9.43)$$

上の $\varphi_{d_1 \mathrm{v}}$ の項は，(9.45) 中の $\tilde{\phi}_{d_1 \mathrm{v}}(x)$ のカソラティアン表示が $x = x_{\max}$ で

も成り立つために必要である．$\phi_{d_1 n}(x)$ が実際固有ベクトルであること，また $\tilde{\phi}_{d_1\mathrm{v}}(x)$ が仮想状態ベクトルであること：

$$\mathcal{H}_{d_1}\phi_{d_1 n}(x)=\mathcal{E}(n)\phi_{d_1 n}(x)\quad(x=0,1,\ldots,x_{\max};n=0,1,\ldots,n_{\max}),$$
$$\mathcal{H}_{d_1}\tilde{\phi}_{d_1\mathrm{v}}(x)=\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}\tilde{\phi}_{d_1\mathrm{v}}(x)\quad(x=0,1,\ldots,x_{\max}-1;\mathrm{v}\in\mathcal{V}\backslash\{d_1\}),$$
$$\mathcal{H}_{d_1}\tilde{\phi}_{d_1\mathrm{v}}(x_{\max})\neq\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}\tilde{\phi}_{d_1\mathrm{v}}(x_{\max}),$$

を確かめるのは容易である．例えば，こうすればよい：

$$\mathcal{H}_{d_1}\phi_{d_1 n}=(\hat{\mathcal{A}}_{d_1}\hat{\mathcal{A}}_{d_1}^{\dagger}+\tilde{\mathcal{E}}_{d_1})\hat{\mathcal{A}}_{d_1}\phi_n=\hat{\mathcal{A}}_{d_1}(\hat{\mathcal{A}}_{d_1}^{\dagger}\hat{\mathcal{A}}_{d_1}+\tilde{\mathcal{E}}_{d_1})\phi_n$$
$$=\hat{\mathcal{A}}_{d_1}\mathcal{H}\phi_n=\hat{\mathcal{A}}_{d_1}\mathcal{E}(n)\phi_n=\mathcal{E}(n)\hat{\mathcal{A}}_{d_1}\phi_n=\mathcal{E}(n)\phi_{d_1 n}.$$

2 つのハミルトニアン $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}_{d_1}$ とは正確に等スペクトルである．もし，元々の系が可解であれば，新しい系も可解になる．新しい固有ベクトル達の直交性関係は

$$(\phi_{d_1 n},\phi_{d_1 m})=\sum_{x=0}^{x_{\max}}\phi_{d_1 n}(x)\phi_{d_1 m}(x)$$
$$=(\hat{\mathcal{A}}_{d_1}\phi_n,\hat{\mathcal{A}}_{d_1}\phi_m)=(\hat{\mathcal{A}}_{d_1}^{\dagger}\hat{\mathcal{A}}_{d_1}\phi_n,\phi_m)=\big((\mathcal{H}-\tilde{\mathcal{E}}_{d_1})\phi_n,\phi_m\big)$$
$$=(\mathcal{E}(n)-\tilde{\mathcal{E}}_{d_1})(\phi_n,\phi_m)=(\mathcal{E}(n)-\tilde{\mathcal{E}}_{d_1})\frac{1}{d_n^2}\delta_{nm}\ (n,m=0,1,\ldots,n_{\max}),$$

となる．これは，内積の正値性には仮想状態のエネルギーが負であること $(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}<0)$ の必要性を示している．

新しい固有ベクトル $\phi_{d_1 n}(x)$ (9.42) と新しい仮想状態ベクトル $\tilde{\phi}_{d_1\mathrm{v}}(x)$ (9.43) は，カソラティアンによって簡潔に表される $(x=0,1,\ldots,x_{\max})$：

$$\phi_{d_1 n}(x)=\frac{-\sqrt{\alpha B'(x)}\,\tilde{\phi}_0(x)}{\sqrt{\check{\xi}_{d_1}(x)\check{\xi}_{d_1}(x+1)}}\mathrm{W}_C\big[\check{\xi}_{d_1},\nu\check{P}_n\big](x),\tag{9.44}$$
$$\tilde{\phi}_{d_1\mathrm{v}}(x)=\frac{-\sqrt{\alpha B'(x)}\,\tilde{\phi}_0(x)}{\sqrt{\check{\xi}_{d_1}(x)\check{\xi}_{d_1}(x+1)}}\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x).\tag{9.45}$$

仮想状態ベクトル達の定符号性が新しい仮想状態ベクトル達 $\tilde{\phi}_{d_1\mathrm{v}}(x)$ (9.43) に受け継がれていることを見よう．カソラティアン $\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x)$ は $x=0,1,\ldots,x_{\max}+1$ で同じ符号である，つまり，すべて正か，すべて負である．(9.36) を使うと

$$\alpha B'(x)\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x)=\alpha D'(x)\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x-1)+(\tilde{\mathcal{E}}_{d_1}-\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}})\check{\xi}_{d_1}(x)\check{\xi}_{\mathrm{v}}(x),$$

となる．順番に $x=0,1,\ldots,x_{\max}+1$ とおいてゆき，

$$\pm(\tilde{\mathcal{E}}_{d_1}-\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}})>0\Rightarrow\pm\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x)>0\quad(x=0,1,\ldots,x_{\max}+1),$$

が得られる．仮想的固有値の集合 $\{\tilde{\mathcal{E}}_{d_j}\}$ は互いに相異なることに注意しよ

う．今度は，新しい基底状態ベクトル $\phi_{d_1 0}(x)$ は，元のもの $\phi_0(x)$ と同様に定符号 (6.35) であることを示そう．カソラティアン $\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\nu](x)$ が $x = 0,1,\ldots,x_{\max}$ で定符号であることを示そう．方程式 $\mathcal{H}\phi_n(x) = \mathcal{E}(n)\phi_n(x)$ $(x=0,1,\ldots,x_{\max})$ を $\mathcal{H} = \hat{A}_{d_1}^\dagger \hat{A}_{d_1} + \tilde{\mathcal{E}}_{d_1}$ と $\check{P}_n(x)$ の方程式 (6.14) とを使って書くと，

$$\begin{aligned}&\alpha B'(x)\nu(x+1)\check{P}_n(x+1) + \alpha D'(x)\nu(x-1)\check{P}_n(x-1)\\&\qquad\qquad = \big(B(x)+D(x)-\mathcal{E}(n)\big)\nu(x)\check{P}_n(x),\end{aligned}$$

となる．$\nu(x)$ の関数関係式 (9.40) を使うと，これは $\check{P}_n(x)$ の元々の差分方程式に帰着されるので，任意の $x \in \mathbb{C}$ で成り立つ．これを用いて，

$$\begin{aligned}&\alpha B'(x)\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\nu\check{P}_n](x)\\&\qquad = \alpha D'(x)\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\nu\check{P}_n](x-1) + (\tilde{\mathcal{E}}_{d_1}-\mathcal{E}(n))\check{\xi}_{d_1}(x)\nu(x)\check{P}_n(x),\end{aligned}$$

が示せる．$n=0$ として，$x = 0,1,\ldots,x_{\max}$ と順々においてゆくことにより，

$$-\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\nu](x) > 0 \quad (x=0,1,\ldots,x_{\max}),$$

が得られる．変形されたハミルトニアン $\mathcal{H}_{d_1}$ を標準系に書き直そう．ポテンシャル関数 $B_{d_1}(x)$ と $D_{d_1}(x)$ を導入する:

$$\begin{aligned}B_{d_1}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha B'(x+1)\frac{\check{\xi}_{d_1}(x)}{\check{\xi}_{d_1}(x+1)}\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\nu](x+1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\nu](x)},\\ D_{d_1}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha D'(x)\frac{\check{\xi}_{d_1}(x+1)}{\check{\xi}_{d_1}(x)}\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\nu](x-1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\nu](x)}.\end{aligned}$$

$B_{d_1}(x)$ と $D_{d_1}(x)$ の正値性は上で示した．境界条件 $B_{d_1}(x_{\max}) = 0$ と $D_{d_1}(0)=0$ とは，満たされている．次の関係式が

$$\begin{aligned}B_{d_1}(x)D_{d_1}(x+1) &= \hat{B}_{d_1}(x+1)\hat{D}_{d_1}(x+1),\\ B_{d_1}(x)+D_{d_1}(x) &= \hat{B}_{d_1}(x)+\hat{D}_{d_1}(x+1)+\tilde{\mathcal{E}}_{d_1},\end{aligned}$$

成り立つ．標準系のハミルトニアンが得られた:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{d_1} &= \mathcal{A}_{d_1}^\dagger\mathcal{A}_{d_1},\\ \mathcal{A}_{d_1} &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B_{d_1}(x)} - e^{\partial}\sqrt{D_{d_1}(x)},\\ \mathcal{A}_{d_1}^\dagger &= \sqrt{B_{d_1}(x)} - \sqrt{D_{d_1}(x)}\,e^{-\partial}.\end{aligned}$$

ここで $\mathcal{A}_{d_1}$ が基底状態固有ベクトルを消す:

$$\mathcal{A}_{d_1}\phi_{d_1 0}(x) = 0 \quad (x=0,1,\ldots,x_{\max}).$$

この仮想状態ベクトルを削除する方法は，[64] で例外 (q-)Racah 多項式の導出に用いたものと本質的に同じやり方である．具体的な表式については，9.2.3

節を参照.

多数の仮想状態ベクトル達の削除

上の手順を繰り返して，変形された系を作ってゆく．削除される仮想状態ベクトルの数は，$|\mathcal{V}|$ および M 以下である．$\{d_1,\ldots,d_s\}$ ($d_j\in\mathcal{V}$：互いに異なる) で指定された s 個の ($s\geq 1$) 仮想状態ベクトルを既に削除したと仮定しよう．その系の内容は以下の通り:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}\stackrel{\text{def}}{=}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_s}\hat{\mathcal{A}}^\dagger_{d_1\ldots d_s}+\tilde{\mathcal{E}}_{d_s},\\
&\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}=(\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s\,x,y})\quad(x,y=0,1,\ldots,x_{\max}),\\
&\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_s}\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{\hat{B}_{d_1\ldots d_s}(x)}-e^{\partial}\sqrt{\hat{D}_{d_1\ldots d_s}(x)},\\
&\hat{\mathcal{A}}^\dagger_{d_1\ldots d_s}=\sqrt{\hat{B}_{d_1\ldots d_s}(x)}-\sqrt{\hat{D}_{d_1\ldots d_s}(x)}\,e^{-\partial},\\
&\hat{B}_{d_1\ldots d_s}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\alpha B'(x+s-1)\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s-1}}](x)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s-1}}](x+1)}\\
&\qquad\qquad\times\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x+1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x)},\qquad(9.46)\\
&\hat{D}_{d_1\ldots d_s}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\alpha D'(x)\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s-1}}](x+1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s-1}}](x)}\\
&\qquad\qquad\times\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x-1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x)},\qquad(9.47)\\
&\phi_{d_1\ldots d_s\,n}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_s}\phi_{d_1\ldots d_{s-1}\,n}(x)\\
&\qquad\qquad(x=0,1,\ldots,x_{\max};n=0,1,\ldots,n_{\max}),\\
&\tilde{\phi}_{d_1\ldots d_s\,\mathrm{v}}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_s}\tilde{\phi}_{d_1\ldots d_{s-1}\,\mathrm{v}}(x)+\delta_{x,x_{\max}}\varphi_{d_1\ldots d_s\,\mathrm{v}}\\
&\qquad\qquad(x=0,1,\ldots,x_{\max};\mathrm{v}\in\mathcal{V}\backslash\{d_1,\ldots,d_s\}),\\
&\quad\varphi_{d_1\ldots d_s\,\mathrm{v}}\stackrel{\text{def}}{=}\phi_{d_1\ldots d_s\,0}(x_{\max})\\
&\quad\times\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x_{\max})\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s-1}},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x_{\max}+1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s-1}}](x_{\max}+1)\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s},\nu](x_{\max})},\\
&\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}\phi_{d_1\ldots d_s\,n}(x)=\mathcal{E}(n)\phi_{d_1\ldots d_s\,n}(x)\\
&\qquad\qquad(x=0,1,\ldots,x_{\max};n=0,1,\ldots,n_{\max}),\\
&\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}\tilde{\phi}_{d_1\ldots d_s\,\mathrm{v}}(x)=\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}}\tilde{\phi}_{d_1\ldots d_s\,\mathrm{v}}(x)\\
&\qquad\qquad(x=0,1,\ldots,x_{\max}-1;\mathrm{v}\in\mathcal{V}\backslash\{d_1,\ldots,d_s\}),\\
&(\phi_{d_1\ldots d_s\,n},\phi_{d_1\ldots d_s\,m})\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{x=0}^{x_{\max}}\phi_{d_1\ldots d_s\,n}(x)\phi_{d_1\ldots d_s\,m}(x)\\
&\qquad=\prod_{j=1}^{s}(\mathcal{E}(n)-\tilde{\mathcal{E}}_{d_j})\cdot\frac{1}{d_n^2}\delta_{nm}\ (n,m=0,1,\ldots,n_{\max}).
\end{aligned}
$$

固有ベクトル $\phi_{d_1\ldots d_s\,n}(x)$ と仮想状態ベクトル $\tilde{\phi}_{d_1\ldots d_s\,\mathrm{v}}(x)$ は，カソラティア

ン表示がある $(x=0,1,\dots,x_{\max})$:

$$
\begin{aligned}
&\phi_{d_1\dots d_s\,n}(x)\\
&=\frac{(-1)^s\sqrt{\prod_{j=1}^{s}\alpha B'(x+j-1)}\,\tilde{\phi}_0(x)\,\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\dots,\check{\xi}_{d_s},\nu\check{P}_n](x)}{\sqrt{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\dots,\check{\xi}_{d_s}](x)\,\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\dots,\check{\xi}_{d_s}](x+1)}}, \quad (9.48)\\
&\tilde{\phi}_{d_1\dots d_s\,\mathrm{v}}(x)\\
&=\frac{(-1)^s\sqrt{\prod_{j=1}^{s}\alpha B'(x+j-1)}\,\tilde{\phi}_0(x)\,\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\dots,\check{\xi}_{d_s},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x)}{\sqrt{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\dots,\check{\xi}_{d_s}](x)\,\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\dots,\check{\xi}_{d_s}](x+1)}}. \quad (9.49)
\end{aligned}
$$

仮想状態ベクトルの表示に現れるカソラティアン $\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\dots,\check{\xi}_{d_s},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x)$ は，$x=0,1,\dots,x_{\max}+1$ で定符号を持ち，基底状態固有ベクトルに現れるもの $\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\dots,\check{\xi}_{d_s},\nu](x)$ は，$x=0,1,\dots,x_{\max}$ でやはり定符号である．

次に削除されるべき仮想状態ベクトル $d_{s+1}\in\mathcal{V}\backslash\{d_1,\dots,d_s\}$ を選び，それによりハミルトニアン $\mathcal{H}_{d_1\dots d_s}$ を書き直すことから，$s+1$ 番目の段階が始まる．ポテンシャル関数 $\hat{B}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)$ と $\hat{D}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)$ とは，(9.46)–(9.47) で $s\to s+1$ として定義される．その正値性や境界条件は満たされている，$\hat{B}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)>0$ $(x=0,1,\dots,x_{\max})$，$\hat{D}_{d_1\dots d_{s+1}}(0)=\hat{D}_{d_1\dots d_{s+1}}(x_{\max}+1)=0$，$\hat{D}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)>0$ $(x=1,2,\dots,x_{\max})$．s 番目と $s+1$ 番目のポテンシャルは，次の関係式を満たす:

$$
\begin{aligned}
&\hat{B}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)\hat{D}_{d_1\dots d_{s+1}}(x+1)=\hat{B}_{d_1\dots d_s}(x+1)\hat{D}_{d_1\dots d_s}(x+1),\\
&\hat{B}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)+\hat{D}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)+\tilde{\mathcal{E}}_{d_{s+1}}=\hat{B}_{d_1\dots d_s}(x)+\hat{D}_{d_1\dots d_s}(x+1)+\tilde{\mathcal{E}}_{d_s}.
\end{aligned}
$$

ハミルトニアン $\mathcal{H}_{d_1\dots d_s}$ が書き直された:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{d_1\dots d_s}=\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}^{\dagger}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}+\tilde{\mathcal{E}}_{d_{s+1}},\\
&\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{\hat{B}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)}-e^{\partial}\sqrt{\hat{D}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)},\\
&\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}^{\dagger}=\sqrt{\hat{B}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)}-\sqrt{\hat{D}_{d_1\dots d_{s+1}}(x)}\,e^{-\partial}.
\end{aligned}
$$

新しいハミルトニアン $\mathcal{H}_{d_1\dots d_{s+1}}$ は $\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}^{\dagger}$ と $\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}$ との順序を変えて得られる．固有ベクトル $\phi_{d_1\dots d_{s+1}\,n}(x)$ および仮想状態ベクトル $\tilde{\phi}_{d_1\dots d_{s+1}\,\mathrm{v}}(x)$ は以下の通り:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{d_1\dots d_{s+1}}\stackrel{\text{def}}{=}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}^{\dagger}+\tilde{\mathcal{E}}_{d_{s+1}},\\
&\mathcal{H}_{d_1\dots d_{s+1}}=(\mathcal{H}_{d_1\dots d_{s+1}\,x,y})\quad(x,y=0,1,\dots,x_{\max}),\\
&\phi_{d_1\dots d_{s+1}\,n}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}\phi_{d_1\dots d_s\,n}(x),\\
&\tilde{\phi}_{d_1\dots d_{s+1}\,\mathrm{v}}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\dots d_{s+1}}\tilde{\phi}_{d_1\dots d_s\,\mathrm{v}}(x)+\delta_{x,x_{\max}}\varphi_{d_1\dots d_{s+1}\,\mathrm{v}},
\end{aligned}
$$

$$\varphi_{d_1\ldots d_{s+1}\,\mathrm{v}} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{d_1\ldots d_{s+1}\,0}(x_{\max}) \\ \times \frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s+1}}](x_{\max})\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x_{\max}+1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x_{\max}+1)\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s+1}},\nu](x_{\max})}.$$

直交関係式は

$$(\phi_{d_1\ldots d_{s+1}\,n}, \phi_{d_1\ldots d_{s+1}\,m}) = \prod_{j=1}^{s+1}(\mathcal{E}(n)-\tilde{\mathcal{E}}_{d_j})\cdot\frac{1}{d_n^2}\delta_{nm} \quad (n,m=0,1,\ldots,n_{\max}).$$

関数 $\phi_{d_1\ldots d_{s+1}\,n}(x)$ および $\tilde{\phi}_{d_1\ldots d_{s+1}\,\mathrm{v}}(x)$ は，(9.48)–(9.49) と同様にカソラティアン表示ができる．カソラティアン $\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s+1}},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x)$ は定符号である:

$$\pm\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](0)(\tilde{\mathcal{E}}_{d_{s+1}}-\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{v}})}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s+1}}](0)\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](0)} > 0 \\ \Rightarrow \pm\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s+1}},\check{\xi}_{\mathrm{v}}](x) > 0 \quad (x=0,1,\ldots,x_{\max}+1).$$

同様に $\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s+1}},\nu](x)$ および最低次の固有ベクトル $\phi_{d_1\ldots d_{s+1}\,0}(x)$ も定符号になる:

$$\mp\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](0)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s+1}}](0)\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s},\nu](0)} > 0 \\ \Rightarrow \pm\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_{s+1}},\nu](x) > 0 \quad (x=0,1,\ldots,x_{\max}).$$

これで $s+1$ 番目の削除ができ上がった．

この項のおわりに，変形されたハミルトニアン $\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}$ を標準形で表そう．

$$\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s} = \mathcal{A}_{d_1\ldots d_s}^\dagger\mathcal{A}_{d_1\ldots d_s}, \\ \mathcal{A}_{d_1\ldots d_s} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B_{d_1\ldots d_s}(x)} - e^{\partial}\sqrt{D_{d_1\ldots d_s}(x)}, \\ \mathcal{A}_{d_1\ldots d_s}^\dagger = \sqrt{B_{d_1\ldots d_s}(x)} - \sqrt{D_{d_1\ldots d_s}(x)}\,e^{-\partial}.$$

演算子 $\mathcal{A}$ が基底状態固有ベクトルを消滅させる:

$$\mathcal{A}_{d_1\ldots d_s}\phi_{d_1\ldots d_s\,0}(x) = 0 \quad (x=0,1,\ldots,x_{\max}).$$

ポテンシャル関数 $B_{d_1\ldots d_s}(x)$ と $D_{d_1\ldots d_s}(x)$ の形は

$$B_{d_1\ldots d_s}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha B'(x+s) \\ \times \frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x+1)}\,\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s},\nu](x+1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s},\nu](x)}, \tag{9.50}$$

$$D_{d_1\ldots d_s}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha D'(x) \\ \times \frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x+1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s}](x)}\,\frac{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s},\nu](x-1)}{\mathrm{W}_C[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_s},\nu](x)}. \tag{9.51}$$

$B_{d_1\ldots d_s}(x)$ と $D_{d_1\ldots d_s}(x)$ の正値性は上で示されたし，境界条件 $B_{d_1\ldots d_s}(x_{\max})$

$=0$ と $D_{d_1\ldots d_s}(0)=0$ も満たされている．次の関係式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&B_{d_1\ldots d_s}(x)D_{d_1\ldots d_s}(x+1)=\hat{B}_{d_1\ldots d_s}(x+1)\hat{D}_{d_1\ldots d_s}(x+1),\\
&B_{d_1\ldots d_s}(x)+D_{d_1\ldots d_s}(x)=\hat{B}_{d_1\ldots d_s}(x)+\hat{D}_{d_1\ldots d_s}(x+1)+\tilde{\mathcal{E}}_{d_s}.
\end{aligned}
$$

ここで述べた s 個の削除の結果は，削除する順序とは独立であるが，$\phi_{d_1\ldots d_s\,n}(x)$ および $\tilde{\phi}_{d_1\ldots d_s\,\mathrm{v}}(x)$ の符号は，順序に依存する．

9.2.3 多添え字 (q-)Racah 多項式の明示的な形

多添え字 (q-)Racah 多項式は (q-)Racah 系に仮想状態削除の方法を適用して得られる．ここでは，パラメタ $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ 依存性をはっきり書こう．[29] の §5 で述べた系の固有関数は正弦的座標 $\eta(x;\boldsymbol{\lambda})$ の直交多項式で記述される．補助関数 $\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})$, $\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\eta(x+1;\boldsymbol{\lambda})-\eta(x;\boldsymbol{\lambda})/\eta(1;\boldsymbol{\lambda})$ は (7.14) で定義されているが，形状不変変換に関連して，前に述べた (7.16), (7.17), (7.19), (7.20) 等の関係式の他に，

$$
\frac{\varphi(x;\boldsymbol{\lambda})}{\varphi(x-1;\boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\delta})}=\varphi(1;\boldsymbol{\lambda}),
$$

という関係式も満たす．

準位集合

$$
\mathcal{D}=\{d_1,d_2,\ldots,d_M\}\quad(d_j\in\mathcal{V}:\text{互いに相異なる}),
$$

で指定された M 個の仮想状態ベクトルを削除して，得られるハミルトニアン，固有関数 $\mathcal{H}_{d_1\ldots d_M}$, $\phi_{d_1\ldots d_M\,n}$, $\mathcal{A}_{d_1\ldots d_M}$ 等を簡単に $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$, $\phi_{\mathcal{D}\,n}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ 等と記そう．

M 個削除後 ($s=M$) の固有ベクトル $\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ (9.48) を $\phi^{\text{gen}}_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ と書こう．2 つの多項式，分母多項式 $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ と多添え字直交多項式 $\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ をカソラティアンから次のように定義する：

$$
\mathrm{W}[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_M}](x;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\varphi_M(x;\boldsymbol{\lambda})\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}),\tag{9.52}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}[\check{\xi}_{d_1},\ldots,\check{\xi}_{d_M},\nu\check{P}_n](x;\boldsymbol{\lambda})\\
&\qquad=\mathcal{C}_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})\varphi_{M+1}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\nu(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}}).
\end{aligned}\tag{9.53}
$$

ここで

$$
\tilde{\boldsymbol{\delta}}\stackrel{\text{def}}{=}(0,0,1,1),
$$

であり，ひねり演算子 $\mathfrak{t}$ （(9.26)）で $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ をひねったものが，$\boldsymbol{\delta}$ になる：

$$
\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda})+\beta\boldsymbol{\delta}=\mathfrak{t}(\boldsymbol{\lambda}+\beta\tilde{\boldsymbol{\delta}})\quad(\forall\beta\in\mathbb{R}).
$$

定数 $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})$ および $\mathcal{C}_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})$ は，後に指定する (9.56)–(9.58)．M 番目の補助関数 $\varphi_M(x;\boldsymbol{\lambda})$ (7.37) は，既に 7.3 節で導入済みである．$\varphi_0(x;\boldsymbol{\lambda})=\varphi_1(x;\boldsymbol{\lambda})=1$ となっている．固有ベクトル (9.48) は

$$\phi^{\text{gen}}_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=(-1)^M\kappa^{\frac14M(M-1)}\frac{\mathcal{C}_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})}{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})}\sqrt{\prod_{j=1}^M\alpha(\boldsymbol{\lambda})B'\bigl(0;\boldsymbol{\lambda}+(j-1)\tilde{\boldsymbol{\delta}}\bigr)}$$
$$\times\frac{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})}{\sqrt{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})}}\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}),\qquad(9.54)$$

のように書き直せる．多添え字直交多項式 $\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ (9.53) は，

$$\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{C}_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})^{-1}\varphi_{M+1}(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}$$
$$\times\begin{vmatrix}\check{\xi}_{d_1}(x_1)&\cdots&\check{\xi}_{d_M}(x_1)&r_1(x_1)\check{P}_n(x_1)\\ \check{\xi}_{d_1}(x_2)&\cdots&\check{\xi}_{d_M}(x_2)&r_2(x_2)\check{P}_n(x_2)\\ \vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\ \check{\xi}_{d_1}(x_{M+1})&\cdots&\check{\xi}_{d_M}(x_{M+1})&r_{M+1}(x_{M+1})\check{P}_n(x_{M+1})\end{vmatrix},\qquad(9.55)$$

と書き表せる．ここで，$x_j\stackrel{\text{def}}{=}x+j-1$ で，$r_j(x)=r_j(x;\boldsymbol{\lambda},M)$ $(1\le j\le M+1)$ の定義は以下の通り：

$$r_j\bigl(x+j-1;\boldsymbol{\lambda},M\bigr)$$
$$\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}\dfrac{(x+a,x+b)_{j-1}(x+d-a+j,x+d-b+j)_{M+1-j}}{(d-a+1,d-b+1)_M}&:\mathrm{R}\\[2ex] \dfrac{(aq^x,bq^x;q)_{j-1}(a^{-1}dq^{x+j},b^{-1}dq^{x+j};q)_{M+1-j}}{(abd^{-1}q^{-1})^{j-1}q^{Mx}(a^{-1}dq,b^{-1}dq;q)_M}&:q\mathrm{R}\end{cases}.$$

$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}$ (9.52) と $\check{P}_{\mathcal{D},n}$ (9.55) とは，実際 η の多項式で

$$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\Xi_{\mathcal{D}}\bigl(\eta(x;\boldsymbol{\lambda}+(M-1)\tilde{\boldsymbol{\delta}});\boldsymbol{\lambda}\bigr),$$
$$\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}P_{\mathcal{D},n}\bigl(\eta(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}});\boldsymbol{\lambda}\bigr),$$

その次数は一般に ℓ と $\ell+n$ であることが示せる．ここで ℓ は，

$$\ell\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^M d_j-\tfrac12M(M-1).$$

これらの多項式の対合 (6.27) に関する性質 (6.28) も，基本の多項式 $\check{P}_n(x)$ および $\check{\xi}_{d_j}(x)$ の性質の帰結である．$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}$ および $\check{P}_{\mathcal{D},n}$ の標準的な正規化を採用する：$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(0;\boldsymbol{\lambda})=1$, $\check{P}_{\mathcal{D},n}(0;\boldsymbol{\lambda})=1$．それから定数 $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})$ および $\mathcal{C}_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})$ が定まる：

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\varphi_M(0;\boldsymbol{\lambda})}\prod_{1\le j<k\le M}\frac{\tilde{\mathcal{E}}_{d_j}(\boldsymbol{\lambda})-\tilde{\mathcal{E}}_{d_k}(\boldsymbol{\lambda})}{\alpha(\boldsymbol{\lambda})B'(j-1;\boldsymbol{\lambda})},\qquad(9.56)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}(-1)^M\mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\tilde{d}_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})^2,\qquad(9.57)$$

$$\tilde{d}_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})^2\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\varphi_M(0;\boldsymbol{\lambda})}{\varphi_{M+1}(0;\boldsymbol{\lambda})}\prod_{j=1}^M\frac{\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})-\tilde{\mathcal{E}}_{d_j}(\boldsymbol{\lambda})}{\alpha(\boldsymbol{\lambda})B'(j-1;\boldsymbol{\lambda})}.\qquad(9.58)$$

双対多項式 $Q_x(\mathcal{E}(n)) \stackrel{\text{def}}{=} P_n(\eta(x))$[29]の使用は，これらの結果を導く上で本質的である．$\{Q_x(\mathcal{E})\}$ の三項関係式は $B(x)$ と $D(x)$ で指定される．分母多項式 $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ は $x=0,1,\ldots,x_{\max}+1$ で正である．最低次の多添え字直交多項式 $\check{P}_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})$ は，$\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ とパラメタのずらし $\boldsymbol{\lambda}\to\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}$ で関係している:

$$\check{P}_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})=\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}).$$

M 個の $(s=M)$ 削除後のポテンシャル関数 $B_{\mathcal{D}}$ （(9.50)）と $D_{\mathcal{D}}$ （(9.51)）とは，分母多項式によってきれいに表される:

$$B_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})=B(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})}\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})},$$
$$D_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})=D(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})}\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-1;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}.$$

基底状態固有ベクトル $\phi_{\mathcal{D}\,0}$ は，$\phi_0(x)$ (6.36) と $\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})$ とによって表される:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{D}\,0}(x;\boldsymbol{\lambda})&=\sqrt{\prod_{y=0}^{x-1}\frac{B_{\mathcal{D}}(y)}{D_{\mathcal{D}}(y+1)}}\\&=\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\sqrt{\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(1;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})}}\,\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\\&=\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},0}(x;\boldsymbol{\lambda})\propto\phi^{\text{gen}}_{\mathcal{D}\,0}(x;\boldsymbol{\lambda}),\\\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})&\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(1;\boldsymbol{\lambda})}\,\frac{\phi_0(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})}{\sqrt{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\,\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})}},\\&\psi_{\mathcal{D}}(0;\boldsymbol{\lambda})=1.\end{aligned}$$

正規化された固有ベクトル $\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ と直交条件は

$$\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda})\stackrel{\text{def}}{=}\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\propto\phi^{\text{gen}}_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\phi_{\mathcal{D}\,n}(0;\boldsymbol{\lambda})=1,$$
$$\sum_{x=0}^{x_{\max}}\frac{\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})^2}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(1;\boldsymbol{\lambda})}\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},m}(x;\boldsymbol{\lambda})=\frac{\delta_{nm}}{d_n(\boldsymbol{\lambda})^2\tilde{d}_{\mathcal{D},n}(\boldsymbol{\lambda})^2},$$
$$(n,m=0,1,\ldots,n_{\max}).$$

上の直交関係は $\boldsymbol{\lambda}$ あるいは $q^{\boldsymbol{\lambda}}$ の有理方程式であるので，分母の零点を除く任意の $\boldsymbol{\lambda}$ について成り立つことを強調しよう．ただし，その場合は重み関数は常に正定値とは限らない．

元の系の形状不変性は，変形後の系にも受け継がれている．行列 $\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})$ は，逆を持ち，2 つのハミルトニアン $\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{H}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})$ とを絡み合わせている:

$$\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})^{\dagger}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{H}_{d_1\ldots d_s}(\boldsymbol{\lambda})-\tilde{\mathcal{E}}_{d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}),$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger = \mathcal{H}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\mathcal{E}}_{d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}).$$

[73] の §4 と同じ議論により，$\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})$ の形状不変性は $\mathcal{H}_{d_1}(\boldsymbol{\lambda})$, $\mathcal{H}_{d_1 d_2}(\boldsymbol{\lambda})$, $\cdots$ に受け継がれる．それ故 $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})$ が形状不変になる：

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger = \kappa\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^\dagger\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) + \mathcal{E}(1;\boldsymbol{\lambda}).$$

形状不変性と正規化条件により，演算子 $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})$ と $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger$ との固有ベクトル $\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ への作用が，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})}{\sqrt{B_{\mathcal{D}}(0;\boldsymbol{\lambda})}}\,\phi_{\mathcal{D}\,n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}),\\
&\qquad (x=0,1,\ldots,x_{\max}-1),\\
&\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\phi_{\mathcal{D}\,n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) = \sqrt{B_{\mathcal{D}}(0;\boldsymbol{\lambda})}\,\phi_{\mathcal{D}\,n}(x;\boldsymbol{\lambda}),\\
&\qquad (x=0,1,\ldots,x_{\max}),
\end{aligned}$$

となる．前方および後方ずらし演算子の定義と具体形は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B_{\mathcal{D}}(0;\boldsymbol{\lambda})}\,\psi_{\mathcal{D}}\,(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})^{-1}\circ\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\circ\psi_{\mathcal{D}}\,(x;\boldsymbol{\lambda})\\
&= B(0;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\big(\varphi(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})\big)^{-1}\\
&\qquad\times\Big(\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) - \check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})e^{\partial}\Big),\\
\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{B_{\mathcal{D}}(0;\boldsymbol{\lambda})}}\,\psi_{\mathcal{D}}\,(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\circ\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\circ\psi_{\mathcal{D}}\,(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\\
&= \big(B(0;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\big)^{-1}\\
&\quad\times\Big(B(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})\\
&\qquad - D(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})e^{-\partial}\Big)\varphi(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}}),
\end{aligned}$$

で与えられ，固有ベクトル $\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ への作用は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}),\\
\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n-1}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}) &= \check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}$$

となる．元々の (q-)Racah 理論（6.1 節）の時と同様に，これらの公式は多添え字直交多項式を明示的に計算するのに有用である．相似変換したハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})^{-1}\circ\mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\circ\psi_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\\
&= B(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})}\bigg(\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})} - e^{\partial}\bigg)\\
&+ D(x;\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x+1;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda})}\bigg(\frac{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x-1;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\Xi}_{\mathcal{D}}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})} - e^{-\partial}\bigg),
\end{aligned}$$

となり，多添え字直交多項式 $\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})$ がその固有多項式になる:

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda}).$$

他の絡み合い関係式は

$$\kappa^{\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})\mathcal{A}_{d_1\ldots d_s}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{A}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\kappa^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{A}_{d_1\ldots d_s}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger=\mathcal{A}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda})^\dagger\hat{\mathcal{A}}_{d_1\ldots d_{s+1}}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta}),$$

で与えられ，対応するポテンシャル関数は (9.46)–(9.47) で $s\to s+1$ として得られる．

0 次の仮想状態ベクトルを削除することは，$M-1$ 個の仮想状態削除と同値である:

$$\check{P}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\Big|_{d_M=0}=\check{P}_{\mathcal{D}',n}(x;\boldsymbol{\lambda}+\tilde{\boldsymbol{\delta}}),\quad \mathcal{D}'=\{d_1-1,\ldots,d_{M-1}-1\}. \tag{9.59}$$

この公式は，[40] の (48)–(49) にある多添え字ラゲールおよびヤコビ多項式のものとよく似ている．分母多項式 $\Xi_{\mathcal{D}}$ の振る舞いも同様である．このことが，前に $d_j\geq 1$ と制限した理由である．

$M=1$ つまり，1 添え字 Racah 多項式と 1 添え字 q-Racah 多項式とでは，多くの式が非常に簡単になる．ℓ 次の仮想状態波動関数 $\Xi_\ell(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})\equiv\xi_\ell(\eta(x);\boldsymbol{\lambda})$(9.39) を使って変形する．1 添え字 Racah 多項式は，(9.55) を $M=1$ で評価して，

$$\begin{aligned}\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=&\frac{c}{(2x+d+1)\big(\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})-\tilde{\mathcal{E}}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\big)}\\&\times\Big(\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})(x+a)(x+b)\check{P}_n(x+1;\boldsymbol{\lambda})\\&-\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})(x+d-a+1)(x+d-b+1)\check{P}_n(x;\boldsymbol{\lambda})\Big),\end{aligned}$$

となり，1 添え字 q-Racah 多項式も同様に，

$$\begin{aligned}\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=&\frac{1-c}{(1-dq^{2x+1})\big(\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})-\tilde{\mathcal{E}}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\big)}\\&\times\Big(\check{\xi}_\ell(x;\boldsymbol{\lambda})(aq^x,bq^x;q)\check{P}_n(x+1;\boldsymbol{\lambda})\\&-\check{\xi}_\ell(x+1;\boldsymbol{\lambda})abd^{-1}q^{-1}(a^{-1}dq^{x+1},b^{-1}dq^{x+1};q)\check{P}_n(x;\boldsymbol{\lambda})\Big),\end{aligned}$$

と表される．ともに，$\check{P}_{\ell,0}(x;\boldsymbol{\lambda})=\check{\xi}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})$ を満たす．1 添え字 Racah 多項式および 1 添え字 q-Racah 多項式の満たす 2 階の差分方程式は，

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\ell(\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})\check{P}_{\ell,n}(x;\boldsymbol{\lambda}),$$

$$\mathcal{E}(n;\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}n(n+\tilde{d}), & \text{R},\\ (q^{-n}-1)(1-\tilde{d}q^{n}), & q\text{R},\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}}_{\ell}(\boldsymbol{\lambda})&=B(x;\boldsymbol{\lambda}+\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\frac{\check{\xi}_{\ell}(x;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\xi}_{\ell}(x+1;\boldsymbol{\lambda})}\left(\frac{\check{\xi}_{\ell}(x+1;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\xi}_{\ell}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}-e^{\partial}\right)\\&\quad+D(x;\boldsymbol{\lambda}+\tilde{\boldsymbol{\delta}})\,\frac{\check{\xi}_{\ell}(x+1;\boldsymbol{\lambda})}{\check{\xi}_{\ell}(x;\boldsymbol{\lambda})}\left(\frac{\check{\xi}_{\ell}(x-1;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}{\check{\xi}_{\ell}(x;\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\delta})}-e^{-\partial}\right).\end{aligned}$$

$\ell=1,2,3$, $n=0,1,2,3$ で，この方程式を検算するのを，練習問題としよう．方程式は代数的なものなので，パラメタの値に関係なく成り立つ．

この節を終えるにあたって，いくつかの注釈を述べよう．通常のスツルム・リュ一ヴィル理論の場合と同様に，多添え字直交多項式 $P_{\mathcal{D},n}(y;\boldsymbol{\lambda})$ は，区間 $0<y<\eta(x_{\max};\boldsymbol{\lambda}+M\tilde{\boldsymbol{\delta}})$ 内に n 個の零点を持つ．これは，ヤコビ行列の固有ベクトルの一般的性質である[76]．鏡映に関する注意．x の格子の中点に関する鏡映，$x\to x_{\max}-x=N-x$ を考える．元々の (q-)Racah 多項式にこの鏡映をすると，同じ種類の多項式の異なるパラメタのものに写る:

$$\check{P}_n(N-x;\boldsymbol{\lambda})=A\times\check{P}_n\bigl(x;(\lambda_1,\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4,\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4,2\lambda_1-\lambda_4)\bigr),$$
$$A=\check{P}_n(N;\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}\dfrac{(a+b-d,a+c-d)_n}{(b,c)_n} & :\text{R}\\[2ex] \bigl(a^{-1}d\bigr)^n\,\dfrac{(abd^{-1},acd^{-1};q)_n}{(b,c;q)_n} & :q\text{R}\end{cases}.$$

これは，ヤコビ多項式の鏡映変換公式

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-\eta)=(-1)^nP_n^{(\beta,\alpha)}(\eta),\quad \eta(x)=\cos 2x,\quad \eta(\tfrac{\pi}{2}-x)=-\eta(x),$$

に対応している．ヤコビ多項式系の I 型と II 型の仮想状態波動関数は，それぞれ，$x=\frac{\pi}{2}$ と $x=0$ でのひねった境界条件に対応している[40]．$x=x_{\max}$ で，方程式を満たさない仮想状態ベクトルは，I 型に対応していると言えるだろう．鏡映によって，$x=0$ で方程式を満たさない II 型の仮想状態ベクトルを作り，それを用いて多添え字 (q-)Racah 多項式の鏡映版が構成できる．それらは，元々の多添え字 (q-)Racah 多項式と

$$\begin{aligned}&\check{P}^{\text{mirror}}_{\mathcal{D},n}(x;\boldsymbol{\lambda})\\&\quad=A\times\check{P}_{\mathcal{D},n}\bigl(N-x;(\lambda_1,\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4,\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4,2\lambda_1-\lambda_4)\bigr),\\&A^{-1}=\check{P}_{\mathcal{D},n}\bigl(N;(\lambda_1,\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4,\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4,2\lambda_1-\lambda_4)\bigr),\end{aligned}$$

のように関係している．正規化条件は，$\check{P}_n(0;\boldsymbol{\lambda})=\check{P}_{\mathcal{D},n}(0;\boldsymbol{\lambda})=\check{P}^{\text{mirror}}_{\mathcal{D},n}(0;\boldsymbol{\lambda})=1$ である．ヤコビ多項式系の場合と異なり，多添え字 (q-)Racah 多項式では，I 型と II 型の仮想状態波動関数を混ぜて使うことはできない．

(*q*-)Racah 多項式から，パラメタの制限や極限操作で種々の直交多項式が作れる．同様に，ここで構成された多添え字 (*q*-)Racah 多項式から，例えば，(dual) (*q*-)Hahn 多項式，alternative *q*-Hahn 多項式等の，多添え字版を作ることができる．ハミルトニアンが無限次元行列の場合，little *q*-Jacobi, (*q*-)Meixner 等は別々に扱った方がよいだろう．

本書で扱った (*q*-)Racah 系のパラメタの取り方 (6.19)–(6.20) は，今まで慣例的に導入されているもの[6]とは異なり，系の持つ離散対称性を良く反映している．このために，パラメタのひねりから仮想状態ベクトルを容易に見つけることができて，多添え字 (*q*-)Racah 多項式の構成に至った．系の対称性を良く反映したパラメタを採用することが，非常に重要であることを強調しよう．

第 10 章
可解な散乱問題：離散量子力学

離散量子力学での可解な散乱問題は，通常の量子力学の場合（第 5 章）と大きく異なることに注意しよう．出発点であるはずの，閉じ込め型でない可解ポテンシャルのよく知られたものが存在しない．純虚数ずらし (idQM) の場合に知られている固有多項式はすべて無限次元の完備な直交基底を与えている．つまり，総てが閉じ込め型なのである．実数ずらし (rdQM) の場合には，(q-)Racah 系のように，有限次元直交空間を張るものが沢山あるが，対応する x 空間も有限なので，漸近状態は作れず散乱問題は定式化できない．純虚数ずらしの自明なポテンシャル $V(x) \equiv 1$ $(-\infty < x < \infty)$ は，指数関数解 $e^{\pm kx}$, $(k > 0)$ を持つので，これを用いた多重ダルブー変換から可解な無反射ポテンシャルが作れる．その適当な組み合わせから，$h(h+1)/\cosh^2 x$ ポテンシャルの idQM 版が作れる．h を任意の実数にしたものが，可解な離散量子力学の統一理論 8.4 節で導入した，$\eta(x) = \sinh x$ の系の特殊な場合で，$|q| = 1$ の q-超球多項式が固有多項式になる．その散乱問題の解には，$|q| = 1$ の q-超幾何関数 ${}_2\phi_1$ の接続公式が必要になる．

10.1　無反射ポテンシャル：idQM

純虚数ずらしの離散量子力学 (6.4) では，自明なポテンシャル $V(x) \equiv 1$ が自由なハミルトニアン $\mathcal{H}_0$ に対応する．その指数関数解と波の解は

$$\mathcal{H}_0 = e^{\gamma p} + e^{-\gamma p} - 2, \quad p = -i\frac{d}{dx}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{10.1}$$
$$\mathcal{H}_0 e^{\pm kx} = \tilde{\mathcal{E}}_k e^{\pm kx}, \qquad \tilde{\mathcal{E}}_k \stackrel{\text{def}}{=} -4\sin^2\frac{k\gamma}{2} < 0,$$
$$\mathcal{H}_0 e^{\pm ikx} = \mathcal{E}^{\rm s}_k e^{\pm ikx}, \qquad \mathcal{E}^{\rm s}_k \stackrel{\text{def}}{=} 4\sinh^2\frac{k\gamma}{2} > 0,$$

となる[77]．指数関数解のエネルギー $\tilde{\mathcal{E}}_k$ は k の周期関数になるので，波数 k の領域を $0 < k \le \frac{\pi}{\gamma}$ に制限する．本章では，第 6 章から第 9 章までと異なり，

$\gamma > 0$ に取ってある．e^{ikx} を右向き波，e^{-ikx} を左向き波と呼ぼう．$\gamma \to 0$ の極限で，これらの量は通常の量子力学でよく知られたものに帰着する:

$$\lim_{\gamma\to 0}\gamma^{-2}\mathcal{H}_0 = p^2, \quad \lim_{\gamma\to 0}\gamma^{-2}\tilde{\mathcal{E}}_k = -k^2, \quad \lim_{\gamma\to 0}\gamma^{-2}\mathcal{E}_k^{\mathrm{s}} = k^2.$$

そして，k の上限の制約はなくなる，$0 < k$.

次の**指数関数種解** $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)$,

$$\psi_j(x) = e^{k_j x} + \tilde{c}_j e^{-k_j x} = \psi_j^*(x), \quad (-1)^{j-1}\tilde{c}_j > 0, \tag{10.2}$$

$$\mathcal{H}_0\psi_j(x) = \tilde{\mathcal{E}}_{k_j}\psi_j(x), \quad 0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_N \le \tfrac{\pi}{\gamma}, \tag{10.3}$$

を，この順序で使って，自由なハミルトニアン $\mathcal{H}_0$ を，N-重ダルブー変換によって変形する[47], [58], [59]．これは，5.2 節の oQM における無反射ポテンシャルの構成の，離散量子力学版である．これらの種解の逆数は，$x = \pm\infty$ で局所可積分なので，これらの変換は固有状態を付け加えるもので，得られるハミルトニアンが非特異ならば N 個の固有状態が付け加わる．まず $\mathcal{H}_0$ を，次のように書き直す，

$$\mathcal{H}_0 = \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger\hat{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_{k_1}, \quad \hat{\mathcal{A}}_1 \stackrel{\text{def}}{=} i\big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\hat{V}_1^*(x)} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\hat{V}_1(x)}\,\big),$$
$$\hat{V}_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_1(x - i\gamma)}{\psi_1(x)}.$$

ダルブー変換を繰り返して

$$\mathcal{H}_{12\ldots s} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{12\ldots s}\hat{\mathcal{A}}_{12\ldots s}^\dagger + \tilde{\mathcal{E}}_{k_s} = \hat{\mathcal{A}}_{12\ldots s\, s+1}^\dagger\hat{\mathcal{A}}_{12\ldots s\, s+1} + \tilde{\mathcal{E}}_{k_{s+1}},$$
$$\hat{\mathcal{A}}_{12\ldots s} \stackrel{\text{def}}{=} i\big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\hat{V}_{12\ldots s}^*(x)} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{\hat{V}_{12\ldots s}(x)}\,\big),$$
$$\hat{V}_{12\ldots s}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{s-1}](x + i\frac{\gamma}{2})}{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{s-1}](x - i\frac{\gamma}{2})}\frac{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s](x - i\gamma)}{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s](x)},$$

が得られる．n 個の関数 $\{f_j(x)\}_{j=1}^n$ のカソラティアン $\mathrm{W}_\gamma[f_1, \ldots, f_n](x)$ は，(6.44) で定義した．

最終段階のハミルトニアン $\mathcal{H}^{[N]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{12\ldots N}$,

$$\mathcal{H}^{[N]} = \hat{\mathcal{A}}^{[N]}\hat{\mathcal{A}}^{[N]\dagger} + \tilde{\mathcal{E}}_{k_N}, \quad \hat{\mathcal{A}}^{[N]} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathcal{A}}_{12\ldots N},$$
$$\hat{V}^{[N]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{V}_{12\ldots N}(x),$$

は，$\mathcal{A}^{[N]} \stackrel{\text{def}}{=} -\hat{\mathcal{A}}^{[N]\dagger}$ とおいて書き直される:

$$\mathcal{H}^{[N]} = \mathcal{A}^{[N]\dagger}\mathcal{A}^{[N]} + \tilde{\mathcal{E}}_{k_N},$$
$$\mathcal{A}^{[N]} \stackrel{\text{def}}{=} i\big(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V^{[N]*}(x)} - e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V^{[N]}(x)}\,\big), \tag{10.4}$$

$$V^{[N]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{V}^{[N]*}(x - i\tfrac{\gamma}{2})$$
$$= \frac{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1, \ldots, \psi_{N-1}](x - i\gamma)}{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1, \ldots, \psi_{N-1}](x)}\frac{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1, \ldots, \psi_N](x + i\frac{\gamma}{2})}{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1, \ldots, \psi_N](x - i\frac{\gamma}{2})}. \tag{10.5}$$

指数関数のカソラティアンは容易に計算できる:

$$\mathrm{W}_\gamma[e^{k_1x},e^{k_2x},\ldots,e^{k_nx}](x)=\prod_{1\le i<j\le n}2\sin\tfrac{\gamma}{2}(k_j-k_i)\cdot e^{\sum_{j=1}^n k_jx}.$$

oQM の対応するロンスキアン公式のファンデルモンド行列式 (5.22) との比較は興味深い．oQM の時と同様に，定数の符号の選び方 $(-1)^{j-1}\tilde{c}_j>0$ $(j=1,\ldots,N)$ により，カソラティアンが実数の x で正になることが判る:

$$\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_j](x)>0,\quad -\infty<x<\infty,\quad j=1,\ldots,N.$$

これより，ハミルトニアン $\mathcal{H}^{[N]}$ が非特異である*1) $\mathcal{H}^{[N]}$ の固有状態 $\Phi_j^{[N]}(x)$ $(j=1,2,\ldots,N)$ と右向き波 $\Psi_k^{[N]}(x)$ $(k>0)$ は

$$\begin{aligned}
\Phi_j^{[N]}(x)&=\frac{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\breve{\psi}_j,\ldots,\psi_N](x)}{\big(\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N](x-i\frac{\gamma}{2})\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N](x+i\frac{\gamma}{2})\big)^{\frac12}},\\
\mathcal{H}^{[N]}\Phi_j^{[N]}(x)&=\tilde{\mathcal{E}}_{k_j}\Phi_j^{[N]}(x),
\end{aligned}\tag{10.6}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_k^{[N]}(x)&=\frac{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N,e^{ikx}](x)}{\big(\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N](x-i\frac{\gamma}{2})\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N](x+i\frac{\gamma}{2})\big)^{\frac12}},\\
\mathcal{H}^{[N]}\Psi_k^{[N]}(x)&=\mathcal{E}_k^{\mathrm{s}}\Psi_k^{[N]}(x).
\end{aligned}\tag{10.7}$$

(10.6) では，$\breve{\psi}_j$ は ψ_j がカソラティアンから除かれることを意味する．これを使うと，$\Phi_j^{[N]}(x)$ と $\Psi_k^{[N]}(x)$ の $x\to\infty$ での漸近形は，

$$\begin{aligned}
\Phi_j^{[N]}(x)&\approx\frac{\mathrm{W}_\gamma[e^{k_1x},\ldots,e^{\breve{k_j}x},\ldots e^{k_Nx}](x)}{\big(\mathrm{W}_\gamma[e^{k_1x},\ldots,e^{k_Nx}](x-i\frac{\gamma}{2})\mathrm{W}_\gamma[e^{k_1x},\ldots,e^{k_Nx}](x+i\frac{\gamma}{2})\big)^{\frac12}}\\
&=(-1)^{j-1}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^N\big(2\sin\tfrac{\gamma}{2}(k_i-k_j)\big)^{-1}\cdot e^{-k_jx},\\
\Psi_k^{[N]}(x)&\approx\frac{\mathrm{W}_\gamma[e^{k_1x},\ldots,e^{k_Nx},e^{ikx}](x)}{\big(\mathrm{W}_\gamma[e^{k_1x},\ldots,e^{k_Nx}](x-i\frac{\gamma}{2})\mathrm{W}_\gamma[e^{k_1x},\ldots,e^{k_Nx}](x+i\frac{\gamma}{2})\big)^{\frac12}}\\
&=\prod_{j=1}^N 2\sin\tfrac{\gamma}{2}(ik-k_j)\cdot e^{ikx},
\end{aligned}$$

となり，$x\to-\infty$ での漸近形は

$$\Phi_j^{[N]}(x)\approx(-1)^{j-1}\tilde{c}_j^{-1}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^N\big(2\sin\tfrac{\gamma}{2}(k_j-k_i)\big)^{-1}\cdot e^{k_jx},$$

$$\Psi_k^{[N]}(x)\approx\prod_{j=1}^N 2\sin\tfrac{\gamma}{2}(ik+k_j)\cdot e^{ikx},$$

---

*1) しかしながら，ハミルトニアンの自己共役性には，$u_N(x)$ (10.10) が複素平面内の矩形領域 $|\mathrm{Im}\,x|<\frac12\gamma$ 内に零点を持たないことが必要である (6.2 節).

となる．これらより，$\Phi_j^{[N]}(x)$ は 2 乗可積分であり，$\Psi_k^{[N]}(x)$ の透過および反射振幅は

$$t^{[N]}(k)=\prod_{j=1}^{N}\frac{\sin\frac{\gamma}{2}(ik-k_j)}{\sin\frac{\gamma}{2}(ik+k_j)}=\prod_{j=1}^{N}\frac{\sinh\frac{\gamma}{2}(k+ik_j)}{\sinh\frac{\gamma}{2}(k-ik_j)},\quad r^{[N]}(k)=0, \tag{10.8}$$

となる．これは，oQM の場合の公式 (5.21) のパラメタ γ による変形になっている．一般の無反射ポテンシャル $V^{[N]}(x)$ (10.5) が散乱問題も含めた意味で可解であることが示された．次のように書ける:

$$\mathcal{H}^{[N]}\phi_n^{[N]}(x)=\mathcal{E}_n^{[N]}\phi_n^{[N]}(x)\quad(n=0,1,\ldots,N-1),$$
$$\mathcal{E}_0^{[N]}<\mathcal{E}_1^{[N]}<\cdots<\mathcal{E}_{N-1}^{[N]}<0.$$

ここで $\phi_n^{[N]}(x)$ および $\mathcal{E}_n^{[N]}$ は

$$\phi_n^{[N]}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\text{const}\times\Phi_{N-n}^{[N]}(x),\quad \mathcal{E}_n^{[N]}\stackrel{\text{def}}{=}\tilde{\mathcal{E}}_{k_{N-n}}\ (n=0,1,\ldots,N-1), \tag{10.9}$$

と定義される．ハミルトニアン $\mathcal{H}^{[N]}$ は N 個の勝手な固有値 $\mathcal{E}_n^{[N]}$ の固有状態を持つことを強調しよう．無反射ポテンシャル関数 $V^{[N]}(x)$ (10.5) とその固有関数 $\phi_n^{[N]}(x)$ (10.6), (10.9) は $\{e^{k_1x},\ldots e^{k_Nx}\}$ の有理関数である．

離散無反射ポテンシャル $V^{[N]}(x)$ (10.5) に関係した諸量が 5.2 節で論じた通常の量子力学の無反射ポテンシャルや KdV ソリトン[51],[52]等とよく似た表式を持つことを示そう．次のように関数 $u_N(x)$ を導入すると，

$$\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N](x)=\prod_{1\le i<j\le N}2\sin\tfrac{\gamma}{2}(k_j-k_i)\cdot e^{\sum_{j=1}^{N}k_jx}u_N(x), \tag{10.10}$$

($\Rightarrow u_N(x)=u_N^*(x)$), 無反射ポテンシャル関数 $V^{[N]}(x)$ (10.5) が

$$V^{[N]}(x)=e^{i\gamma k_N}\frac{u_{N-1}(x-i\gamma)}{u_{N-1}(x)}\frac{u_N(x+i\frac{\gamma}{2})}{u_N(x-i\frac{\gamma}{2})},$$

と表される．この関数 $u_N(x)$ (10.10) は行列式表示ができる，

$$u_N(x)=\det A_N(x),$$
$$\bigl(A_N(x)\bigr)_{mn}\stackrel{\text{def}}{=}\delta_{mn}+\frac{c_me^{-(k_m+k_n)x}}{\sin\frac{\gamma}{2}(k_m+k_n)}\quad(m,n=1,2,\ldots,N). \tag{10.11}$$

ここで，$\tilde{c}_j$ と c_j の関係は

$$\tilde{c}_j=\frac{c_j}{\sin\gamma k_j}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}\frac{\sin\frac{\gamma}{2}(k_i-k_j)}{\sin\frac{\gamma}{2}(k_i+k_j)}, \tag{10.12}$$

であり，条件 $(-1)^{j-1}\tilde{c}_j>0$ は $c_j>0$ を意味する．この行列式は，次のように展開される:

$$u_N(x)=\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_N=0}^{1}\exp\Bigl(\sum_{j=1}^{N}\mu_j\eta_j+\sum_{1\le i<j\le N}a_{ij}\mu_i\mu_j\Bigr),$$

$$e^{\eta_j}=\frac{c_je^{-2k_jx}}{\sin\gamma k_j},\quad e^{a_{ij}}=\Bigl(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}(k_i-k_j)}{\sin\frac{\gamma}{2}(k_i+k_j)}\Bigr)^2.$$

これは，正の $k_j(<\frac{\pi}{\gamma})$ と c_j では，実数 x で明白な正値関数である．関数 $u_{N,j}(x)$ $(j=1,\ldots,N)$ を

$$\begin{aligned}&\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\breve{\psi}_j,\ldots,\psi_N](x)\\&=\prod_{\substack{1\le i<l\le N\\ i,l\neq j}}2\sin\tfrac{\gamma}{2}(k_l-k_i)\cdot e^{\sum_{i=1}^{N}k_ix-k_jx}u_{N,j}(x),\end{aligned}$$

$(\Rightarrow u_{N,j}(x)=u^*_{N,j}(x))$ で定義する．固有関数 $\Phi_j^{[N]}(x)$ (10.6) が

$$\begin{aligned}\Phi_j^{[N]}(x)=(-1)^{j-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\bigl(2\sin\tfrac{\gamma}{2}(k_i-k_j)\bigr)^{-1}&\\ \times e^{-k_jx}\frac{u_{N,j}(x)}{\sqrt{u_N(x-i\frac{\gamma}{2})u_N(x+i\frac{\gamma}{2})}}&,\end{aligned}$$

と表される．この関数 $u_{N,j}(x)$ も (10.11) で，$c_m\to\frac{\sin\frac{\gamma}{2}(k_j-k_m)}{\sin\frac{\gamma}{2}(k_j+k_m)}c_m$ $(m=1,\ldots,N)$ と置き換えることによって行列式表示ができる:

$$\begin{aligned}&u_{N,j}(x)=\det A_{N,j}(x),\\&\bigl(A_{N,j}(x)\bigr)_{mn}\stackrel{\text{def}}{=}\delta_{mn}+\frac{\sin\frac{\gamma}{2}(k_j-k_m)}{\sin\frac{\gamma}{2}(k_j+k_m)}\frac{c_me^{-(k_m+k_n)x}}{\sin\frac{\gamma}{2}(k_m+k_n)},\\&\qquad\qquad(m,n=1,2,\ldots,N).\end{aligned}$$

前述のように $\gamma\to0$ の極限で，カソラティアンはロンスキアンに帰着する ((6.51)),

$$\lim_{\gamma\to0}\gamma^{-\frac{1}{2}n(n-1)}\mathrm{W}_\gamma[f_1,\ldots,f_n](x)=\mathrm{W}[f_1,\ldots,f_n](x).$$

ここで $f_j(x)$ 達は γ に依らないと仮定している．$\gamma\to0$ の極限で，k_j と $\tilde{c}_j$ が γ に依らないとすると ((10.12) は $c_j=O(\gamma)$ となる)，本節の種々の量が通常の量子力学の対応する量に帰着する．例えば，oQM の無反射ポテンシャル (5.12), (5.13) は

$$\begin{aligned}&U_N(x)=-2\partial_x^2\log\mathfrak{u}_N(x),\quad \mathfrak{u}_N(x)=\det\mathfrak{A}_N(x),\\&\bigl(\mathfrak{A}_N(x)\bigr)_{mn}\stackrel{\text{def}}{=}\delta_{mn}+\frac{\mathfrak{c}_me^{-(k_m+k_n)x}}{k_m+k_n}\quad(m,n=1,2,\ldots,N),\end{aligned}$$

と書けたことを思い起こそう．ハミルトニアン同士は直接関係付くが，ポテン

シャル関数 $V^{[N]}(x)$ と $U_N(x)$ とはそうでない．$U_N(x)$ に，より直接的に関係しているのは，$\mathcal{U}_N(x)$ である:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_N(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{V^{[N]}(x+i\tfrac{\gamma}{2})V^{[N]*}(x-i\tfrac{\gamma}{2})} = \mathcal{U}_N^*(x) \\
&= \frac{\sqrt{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N](x+i\gamma)\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N](x-i\gamma)}}{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N](x)} \\
&= \frac{\sqrt{u_N(x+i\gamma)u_N(x-i\gamma)}}{u_N(x)}. \qquad (10.13)
\end{aligned}
$$

その極限は

$$
\lim_{\gamma\to 0}\left(\tfrac{2}{\gamma}\right)^2\left(\mathcal{U}_N(x)-1\right) = U_N(x)
$$

となる．

$\mathcal{U}_N(x)$ (10.13) に適当な時間依存性を導入して，$\mathcal{U}_N(x;t)$ が KdV 方程式 (5.14)–(5.16) の適当な変形になるようにするのは，興味深い問題である．

rdQM の無反射ポテンシャルは，[79] で論じられている．

10.2　離散版の $1/\cosh^2 x$ ポテンシャル

次に無反射ポテンシャルのパラメタを特別なものに取ることによって，5.4 節で論じた $1/\cosh^2 x$ ポテンシャルの離散版ができることを示そう．

波数 k_j と定数 $\tilde{c}_j$ を

$$
k_j = j, \quad \tilde{c}_j = (-1)^{j-1},
$$

と取ると，$\psi_1,\ldots,\psi_N$ (10.2) のカソラティアンは，

$$
\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_N](x) = \prod_{j=1}^{N-1}\left(2\sin\tfrac{\gamma}{2}j\right)^{N-j}\cdot\prod_{j=1}^{N}\prod_{l=1}^{j} 2\cosh\left(x+i\gamma(\tfrac{j+1}{2}-l)\right),
$$

となる．これを用いるとこの特殊な無反射ポテンシャル関数 $V^{[N]}(x)$ (10.5) と基底状態波動関数 $\Phi_N^{[N]}(x)$ (10.6) ($=\phi_0^{[N]}(x)$ (10.9)) は

$$
V^{[N]}(x) = e^{-i\gamma N}\frac{(1+e^{i\gamma N}e^{2x})(1+e^{i\gamma(N-1)}e^{2x})}{(1+e^{2x})(1+e^{-i\gamma}e^{2x})}, \qquad (10.14)
$$

$$
\Phi_N^{[N]}(x) = \left(\prod_{j=1}^{N-1} 2\sin\tfrac{\gamma}{2}j\right)^{-1}\cdot\left(\prod_{j=1}^{N} 4\cosh(x-i\tfrac{\gamma}{2}j)\cosh(x+i\tfrac{\gamma}{2}j)\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (10.15)
$$

となる．$\gamma\to 0$ の極限で，このハミルトニアン $\mathcal{H}^{[N]}$ と $V^{[N]}(x)$ (10.14) は，oQM の無反射 $-N(N+1)/\cosh^2 x$ ポテンシャル (5.26) に帰着する．更に固有関数は，

$$\frac{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\breve{\psi}_{N-n},\ldots,\psi_N](x)}{\mathrm{W}_\gamma[\psi_1,\ldots,\psi_{N-1}](x)}\times\prod_{l=1}^{n}\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}l\,\sin\frac{\gamma}{2}(2N-2n+l)}{\sin\frac{\gamma}{2}(N-l)}$$
$$=e^{-i\gamma(N-\frac{1}{4}(3n-1))n}$$
$$\times\, p_n(i\sinh x;e^{i\frac{\gamma}{2}N},e^{i\frac{\gamma}{2}(N-1)},-e^{i\frac{\gamma}{2}N},-e^{i\frac{\gamma}{2}(N-1)}|e^{-i\gamma}),\quad(10.16)$$

となる．ここで，$p_n(\eta;a_1,a_2,a_3,a_4|q)$ は Askey-Wilson 多項式 (6.23) である，$q=e^{-i\gamma}$．この種の Askey-Wilson 多項式の特殊形 (10.16) は，q-超球多項式[4], [6]と呼ばれ，ゲーゲンバウアー多項式の q-変形になっている．パラメタの対称性のおかげで，q-超球多項式 $C_n(\cos x;\beta|q)$ は ${}_3\phi_2$ あるいは ${}_2\phi_1$ を用いて表すこともできる[4], [6]:

$$\begin{aligned}
&C_n(\cos x;\beta|q)\\
&\stackrel{\text{def}}{=}\frac{(\beta^2;q)_n}{(\beta q^{\frac{1}{2}},-\beta,-\beta q^{\frac{1}{2}},q;q)_n}p_n(\cos x;\beta^{\frac{1}{2}},\beta^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}},-\beta^{\frac{1}{2}},-\beta^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}|q)\\
&=\frac{(\beta^2;q)_n}{(q;q)_n}\beta^{-\frac{1}{2}n}{}_4\phi_3\Bigl(\begin{matrix}q^{-n},\,\beta^2q^n,\,\beta^{\frac{1}{2}}e^{ix},\,\beta^{\frac{1}{2}}e^{-ix}\\ \beta q^{\frac{1}{2}},\,-\beta,\,-\beta q^{\frac{1}{2}}\end{matrix}\Bigm|q\,;q\Bigr)\\
&=\frac{(\beta^2;q)_n}{(q;q)_n}\beta^{-n}e^{-inx}{}_3\phi_2\Bigl(\begin{matrix}q^{-n},\,\beta,\,\beta e^{2ix}\\ \beta^2,\,0\end{matrix}\Bigm|q\,;q\Bigr)\\
&=\frac{(\beta;q)_n}{(q;q)_n}e^{inx}{}_2\phi_1\Bigl(\begin{matrix}q^{-n},\,\beta\\ \beta^{-1}q^{1-n}\end{matrix}\Bigm|q\,;\beta^{-1}qe^{-2ix}\Bigr)\quad(n\in\mathbb{Z}_{\geq0}).
\end{aligned}\tag{10.17}$$

正弦的座標の変換 $\cos x\to i\sinh x$ は

$$\cos x\to i\sinh x\iff x\to\tfrac{\pi}{2}-ix,\tag{10.18}$$

で実現される．特殊な無反射ポテンシャル (10.14) の固有関数 $\phi_n^{[N]}(x)$ (10.9) のカソラティアンで定義された固有関数 $\Phi_n^{[N]}(x)$(10.6) との比例係数を

$$\phi_n^{[N]}(x)=\prod_{l=1}^{N-1}2\sin\tfrac{\gamma}{2}l\cdot\prod_{l=1}^{n}\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}l\,\sin\frac{\gamma}{2}(2N-2n+l)}{\sin\frac{\gamma}{2}(N-l)}\times\Phi_{N-n}^{[N]}(x)\tag{10.19}$$

のように選ぶ．

8.4 節で導入した可解な離散量子力学の具体例の一つに $\eta(x)=\sinh x$ (8.65) のものがある．そのハミルトニアンの具体形は

$$\mathcal{H}'=\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A},\quad\mathcal{A}\stackrel{\text{def}}{=}i\bigl(e^{\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V^*(x)}-e^{-\frac{\gamma}{2}p}\sqrt{V(x)}\,\bigr),\tag{10.20}$$

$$V(x)=e^{i\pi}e^{-i\frac{\gamma}{2}}\frac{a_1^*a_2^*}{|a_1a_2|}\frac{\prod_{j=1}^{2}(1+a_je^x)(1-a_j^{*\,-1}e^x)}{(1+e^{2x})(1+e^{-i\gamma}e^{2x})},$$
$$q=e^{-i\gamma},\quad0<\gamma<\pi.\tag{10.21}$$

パラメタを，以下のように特殊化すると

$$a_j = e^{-i\gamma(\alpha_j + i\beta_j)}, \quad \beta_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \tag{10.22}$$

$$\gamma - \pi < \gamma\alpha_j < 0, \quad -\gamma\alpha > \pi - \tfrac{\gamma}{2} \quad (\alpha \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2), \tag{10.23}$$

その固有関数は

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}'\phi_n(x) = \mathcal{E}'_n\phi_n(x) \quad (n = 0, 1, \ldots, n_{\max}), \quad n_{\max} = [\tfrac{1}{2} - \alpha - \tfrac{\pi}{\gamma}]', \\
&\phi_n(x) = \phi_0(x) P_n\big(\eta(x)\big), \quad \eta(x) = \sinh x, \\
&\qquad \mathcal{E}'_n = 4 \sin \tfrac{\gamma}{2} n \, \sin \tfrac{\gamma}{2}(n - 1 + 2\alpha), \\
&P_n(\eta) = e^{-i\frac{\pi}{2}n} e^{i\gamma\frac{3}{4}n(n-1)} e^{i\gamma\alpha n} (-i)^n \\
&\qquad \times p_n(i\eta; ia_1, ia_2, -ia_1^{*\,-1}, -ia_2^{*\,-1} | e^{-i\gamma}), \qquad (10.24) \\
&\phi_0(x) = e^{(\frac{1}{2} - \alpha - \frac{\pi}{\gamma})x} \sqrt{1 + e^{2x}} \\
&\times \Bigg(\prod_{j=1}^{2} \frac{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x + \gamma\beta_j + i\gamma(\frac{1}{2} - \alpha_j)\big) \Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x - \gamma\beta_j + i\gamma(\frac{1}{2} - \alpha_j) - i\pi\big)}{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x + \gamma\beta_j - i\gamma(\frac{1}{2} - \alpha_j)\big) \Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x - \gamma\beta_j - i\gamma(\frac{1}{2} - \alpha_j) + i\pi\big)} \Bigg)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

$$(10.25)$$

となる．**量子二重対数** (quantum dilogarithm) 関数 $\Phi_\gamma(z)$[80], [81] が $|q| = 1$ の直交多項式 $P_n(\eta)$ (10.24) の有限次元の直交重み関数で，中心的な役割を担う．これは有理型関数で，$|\mathrm{Im}\, z| < \gamma + \pi$ においては，積分表示

$$\Phi_\gamma(z) = \exp\Big(\int_{\mathbb{R}+i0} \frac{e^{-izt}}{4 \sinh \gamma t \, \sinh \pi t} \frac{dt}{t} \Big) \qquad (|\mathrm{Im}\, z| < \gamma + \pi), \tag{10.26}$$

で定義され，全複素平面に関数方程式

$$\frac{\Phi_\gamma(z + i\gamma)}{\Phi_\gamma(z - i\gamma)} = \frac{1}{1 + e^z}, \tag{10.27}$$

によって解析接続される．量子二重対数関数は，百年近く前から知られている二重ガンマ関数[82]や二重 sine 関数[83], [84]とも密接に関係している．量子二重対数関数の種々の性質については，[78] の Appendix B を参照．

上で得られた特殊な無反射ポテンシャル関数 $V^{[N]}(x)$ (10.14) を，可解な $|q| = 1$ の系として同定しよう．まず，

$$N + 2 < \frac{\pi}{\gamma},$$

と仮定して，(10.22) 中の $\mathcal{H}'$ のパラメタを選ぶ：

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \alpha_1 = -\tfrac{\pi}{2\gamma} - \tfrac{N}{2}, \quad \alpha_2 = -\tfrac{\pi}{2\gamma} - \tfrac{N-1}{2} \\
&\qquad \big(\Rightarrow a_1 = ie^{i\frac{\gamma}{2}N}, \ a_2 = ie^{i\frac{\gamma}{2}(N-1)}\big).
\end{aligned}$$

すると 2 つのハミルトニアン，$V^{[N]}(x)$(10.14) で決まる $\mathcal{H}^{[N]}$ と $\mathcal{H}'$ (10.20) とが加法定数を除いて等しくなり，

$$\mathcal{H}^{[N]}=\mathcal{H}'+\tilde{\mathcal{E}}_{k_N},\tag{10.28}$$

$\mathcal{H}'$ の基底状態固有関数 $\phi_0(x)$ (10.25) および固有多項式 $P_n(\eta)$ (10.24) が

$$\phi_0(x)=\Bigl(\prod_{j=1}^{N}4\cosh(x-i\tfrac{\gamma}{2}j)\cosh(x+i\tfrac{\gamma}{2}j)\Bigr)^{-\frac{1}{2}},\tag{10.29}$$

$$\begin{aligned}P_n(\eta)&=e^{-i\gamma(N-\frac{1}{4}(3n-1))n}\\&\quad\times p_n(i\eta;e^{i\frac{\gamma}{2}N},e^{i\frac{\gamma}{2}(N-1)},-e^{i\frac{\gamma}{2}N},-e^{i\frac{\gamma}{2}(N-1)}|e^{-i\gamma}),\end{aligned}\tag{10.30}$$

となる．すなわち，$\mathcal{H}'$ の $\phi_n(x)$ (10.25) が $\mathcal{H}^{[N]}$ の $\phi_n^{[N]}(x)$ (10.19) に等しくなる．(10.28) の加法定数 $\tilde{\mathcal{E}}_{k_N}$ が $\mathcal{H}^{[N]}$ の正しい固有値を与え，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n^{[N]}=\mathcal{E}'_n+\tilde{\mathcal{E}}_{k_N}&=4\sin\tfrac{\gamma}{2}n\,\sin\tfrac{\gamma}{2}(n-1+2\alpha)-4\sin^2\tfrac{\gamma}{2}k_N\\&=-4\sin^2\tfrac{\gamma}{2}(N-n)=\tilde{\mathcal{E}}_{k_{N-n}},\end{aligned}$$

離散固有状態の最高準位が $n_{\max}=[\frac{1}{2}-\alpha-\frac{\pi}{\gamma}]'=[N]'=N-1$ となる．$\mathcal{H}'$ の基底状態固有関数 $\phi_0(x)$ (10.25) 中の量子二重対数関数が初等関数 (10.29) に帰着することを示すには，関数方程式 (10.27) を繰り返し使う：

$$\frac{\Phi_\gamma(z+i\gamma n_1)}{\Phi_\gamma(z-i\gamma n_2)}=\prod_{k=0}^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}\frac{1}{1+e^{z+i\gamma(n_1-2k-1)}}\qquad\bigl(n_1,n_2\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\quad n_1\equiv n_2\ (\mathrm{mod}\ 2)\bigr).$$

これで無反射 $1/\cosh^2 x$ ポテンシャルの離散量子力学版が，idQM の無反射ポテンシャルの特別な組み合わせから得られたことになる．

次に，一般の $1/\cosh^2 x$ ポテンシャルの離散版を作ろう．ハミルトニアン $\mathcal{H}'$ (10.20) のパラメタを

$$\begin{aligned}&\beta_1=\beta_2=0,\quad \alpha_1=-\tfrac{\pi}{2\gamma}-\tfrac{h}{2},\quad \alpha_2=-\tfrac{\pi}{2\gamma}-\tfrac{h}{2}+\tfrac{1}{2}\\&\bigl(\Rightarrow a_1=ie^{i\frac{\gamma}{2}h},\ a_2=ie^{i\frac{\gamma}{2}(h-1)}\bigr),\quad h>0,\quad h+2<\tfrac{\pi}{\gamma},\end{aligned}\tag{10.31}$$

のように取って，新しいハミルトニアン $\mathcal{H}$，

$$\mathcal{H}\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{H}'+\tilde{\mathcal{E}}_h,\quad \tilde{\mathcal{E}}_h\stackrel{\text{def}}{=}-4\sin^2\tfrac{h\gamma}{2},\tag{10.32}$$

を定義する．パラメタの値域は，前の制限 (10.22) を満たしている．$\mathcal{H}$ の固有状態は，

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}\phi_n(x)=\mathcal{E}_n\phi_n(x)\quad(n=0,1,\ldots,n_{\max}),\quad n_{\max}=[h]',\\&V(x)=e^{-i\gamma h}\frac{(1+e^{i\gamma h}e^{2x})(1+e^{i\gamma(h-1)}e^{2x})}{(1+e^{2x})(1+e^{-i\gamma}e^{2x})},\\&\phi_n(x)=\phi_0(x)P_n\bigl(\eta(x)\bigr),\quad \eta(x)=\sinh x,\end{aligned}\tag{10.33}$$

$$\mathcal{E}_n = \tilde{\mathcal{E}}_{h-n} = -4\sin^2\tfrac{\gamma}{2}(h-n), \tag{10.34}$$

$$\begin{aligned}
P_n(\eta) &= e^{-i\gamma(h-\frac{1}{4}(3n-1))n} \\
&\qquad \times p_n(i\eta; e^{i\frac{\gamma}{2}h}, e^{i\frac{\gamma}{2}(h-1)}, -e^{i\frac{\gamma}{2}h}, -e^{i\frac{\gamma}{2}(h-1)}|e^{-i\gamma}) \\
&\propto C_n(i\sinh x;\beta|q), \quad q=e^{-i\gamma}, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\gamma h} = q^{-h}, \qquad (10.35)\\
\phi_0(x) &= e^{hx}\sqrt{1+e^{2x}} \\
&\quad \times \left(\frac{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x+i\frac{\gamma}{2}(h+1)+i\frac{\pi}{2}\big)\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x+i\frac{\gamma}{2}(h+1)-i\frac{\pi}{2}\big)}{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x-i\frac{\gamma}{2}(h+1)-i\frac{\pi}{2}\big)\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x-i\frac{\gamma}{2}(h+1)+i\frac{\pi}{2}\big)}\right. \\
&\qquad \left.\times\frac{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x+i\frac{\gamma}{2}h+i\frac{\pi}{2}\big)\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x+i\frac{\gamma}{2}h-i\frac{\pi}{2}\big)}{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x-i\frac{\gamma}{2}h-i\frac{\pi}{2}\big)\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(x-i\frac{\gamma}{2}h+i\frac{\pi}{2}\big)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= e^{hx}\sqrt{1+e^{2x}}\ \left(\frac{\Phi_{\gamma}\big(2x+i\gamma(1+h)\big)\Phi_{\gamma}\big(2x+i\gamma h\big)}{\Phi_{\gamma}\big(2x-i\gamma(1+h)\big)\Phi_{\gamma}\big(2x-i\gamma h\big)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= e^{hx}\sqrt{1+e^{2x}}\ \left(\frac{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(2x+i\gamma(h+\frac{1}{2})\big)}{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(2x-i\gamma(h+\frac{1}{2})\big)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (10.36)
\end{aligned}$$

となる．$\phi_0(x)$ の変形には，量子二重対数関数の以下の性質を用いた．

$$\Phi_\gamma(z+i\tfrac{\pi}{2})\Phi_\gamma(z-i\tfrac{\pi}{2}) = \Phi_{2\gamma}(2z),\ \Phi_\gamma(z+i\tfrac{\gamma}{2})\Phi_\gamma(z-i\tfrac{\gamma}{2}) = \Phi_{\frac{\gamma}{2}}(z). \tag{10.37}$$

$P_n(\eta)$ はゲーゲンバウアー多項式と同様に定まった偶奇性 $P_n(-\eta) = (-1)^n P_n(\eta)$ を持つ．$\mathcal{H}$ (10.32) は，形状不変（$h \to h-1$，2.3.5 節参照）で，パラメタの反転に関して対称であることに注意しよう:

$$\begin{aligned}
&h \leftrightarrow -h-1, \qquad (10.38)\\
&V(x)V^*(x-i\gamma), \quad V(x)+V^*(x)-\tilde{\mathcal{E}}_h:\ \text{不変}.
\end{aligned}$$

これに反して，固有関数 (10.34)–(10.36) は，パラメタ反転に関し不変でない．と言うのも，解の半分が 2 乗可積分性の要求から捨てられているから．しかしながら，散乱問題には解の 2 次元空間総てが使われるので，散乱振幅はパラメタ反転に関して不変のはずである．このハミルトニアン $\mathcal{H}$ は正しい $\gamma \to 0$ 極限を持ち，

$$\lim_{\gamma\to 0}\gamma^{-2}\mathcal{H} = p^2 - \frac{h(h+1)}{\cosh^2 x},$$

(10.33) と同様に，$x = i\pi/2 \pmod{i\pi}$ に確定特異点がある．その特性指数は，$h+1$ と $-h$ である．このパラメタ反転不変性 (10.38) は透過・反射振幅 $t(k)$, $r(k)$ (5.28) にも正しく受け継がれている．

10.3 散乱問題

上で得られたハミルトニアン $\mathcal{H}$ (10.32) は，漸近的に自由ハミルトニアン $\mathcal{H}_0$ (10.1) に近づき，平面波解 $e^{\pm ikx}$ を持つ：

$$\mathcal{H} \to \mathcal{H}_0 \quad (x \to \pm\infty), \quad \mathcal{H}e^{\pm ikx} \approx \mathcal{E}_k^{\mathrm{s}} e^{\pm ikx}, \quad \mathcal{E}_k^{\mathrm{s}} = 4\sinh^2 \frac{k\gamma}{2}.$$

通常の量子力学の場合（5.1 節）と同様に，散乱問題も完全に解けると期待される．しかしながら，そのために用いる方法にいくつかの微妙な問題が存在する．その問題とは，(i) 漸近的に平面波に近づく解は，q-超球多項式ではなく，無限次まで続く q-超幾何関数 ${}_2\phi_1$ (10.17) になる．$|q|=1$ では，分母の因子 $(q;q)_k$, $k=0,1,\ldots$ のために，収束性が問題になる．明らかに，q が 1 のべき根 $q^n=1$ の場合には，発散する．(ii) $x \to +\infty$ で，右行き平面波に近づく解を，$x \to -\infty$ まで解析接続 (5.2) する必要がある．それは，$|q|=1$ での q-超幾何関数 ${}_2\phi_1$ の接続公式そのもので，これは知られていない．

q-超幾何関数 ${}_2\phi_1$

$${}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a_1,\, a_2 \\ b_1 \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\, a_2; q)_n}{(b_1; q)_n} \frac{z^n}{(q;q)_k},$$

の収束性に関しては，最近の大島の仕事等[85], [86]で解決した．$q = e^{2\pi i\theta}$ と書いて，θ が有理数の時，および有理数に非常に近い無理数の時も，発散するが，これらを含むルベーグ測度 0 の集合を除いて，上の ${}_2\phi_1$ は，z について，有限な収束半径を持つ．今後は，q は，1 のべき根などは避け，${}_2\phi_1$ が有限な収束半径を持つようなものに限っているとしよう．

$x \to +\infty$ で，右向き平面波に近づく解は，離散固有状態の固有関数 (10.35)–(10.36) を q-超幾何関数で表すことから得られる:

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &\propto \phi_0(x) C_n(i\sinh x; \beta|q), \qquad q = e^{-i\gamma}, \quad \beta = e^{i\gamma h} = q^{-h}, \\
&\propto e^{hx}\sqrt{1+e^{2x}} \left(\frac{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\left(2x + i\gamma(h+\frac{1}{2})\right)}{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\left(2x - i\gamma(h+\frac{1}{2})\right)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{nx} \\
&\quad \times {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n},\, \beta \\ \beta^{-1}q^{1-n} \end{matrix} \,\middle|\, q\,; \beta^{-1}qe^{-2x-i\pi}\right),
\end{aligned}$$

ここで，$x \to \frac{\pi}{2} - ix$ (10.18) の置き換えは，q-超球多項式 (10.17) での正弦的座標の置き換え $\cos x \to i\sinh x$ に対応している．次に，oQM の時 (5.31) と同様に，$n = h + ik$ と置き換えて，複素 k 平面に解析接続する:

$$\begin{aligned}
\Psi_k(x) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{ikx}e^{2hx}\sqrt{1+e^{2x}} \left(\frac{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\left(2x + i\gamma(h+\frac{1}{2})\right)}{\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\left(2x - i\gamma(h+\frac{1}{2})\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-h-ik},\, q^{-h} \\ q^{1-ik} \end{matrix} \,\middle|\, q\,; q^{1+h}e^{-2x-i\pi}\right). \qquad (10.39)
\end{aligned}$$

この解は，量子二重対数関数の漸近公式 (10.52) を用いると，$x \to \infty$ で右向

き平面波 e^{ikx} に近づくことが判る．

$\Psi_k(x)$ (10.39) を漸近領域 $x \to -\infty$ で評価するには，$|q|=1$ での q-超幾何関数 ${}_2\phi_1\left({a,b \atop c}\middle|q;z\right)$ の接続公式が必要である．しかしながら，知られているものは Watson[87] によって導出された $0<q<1$ のものだけである（[88] の (4.3.2)）:

$$
\begin{aligned}
&{}_2\phi_1\left({a,\,b \atop c}\middle|\,q\,;z\right)\\
&\quad= \frac{(b,c/a;q)_\infty}{(c,b/a;q)_\infty}\frac{(az,q/(az);q)_\infty}{(z,q/z;q)_\infty}\cdot{}_2\phi_1\left({a,\,aq/c \atop aq/b}\middle|\,q\,;\frac{cq}{abz}\right)\\
&\qquad+\frac{(a,c/b;q)_\infty}{(c,a/b;q)_\infty}\frac{(bz,q/(bz);q)_\infty}{(z,q/z;q)_\infty}\cdot{}_2\phi_1\left({b,\,bq/c \atop bq/a}\middle|\,q\,;\frac{cq}{abz}\right).
\end{aligned}
\tag{10.40}
$$

この接続公式の等号 ‘=’ は，「右辺は左辺の解析接続になっている」の意味である．この公式導出の基本的な論理は，右辺の q-超幾何関数と z に依存する因子とが左辺と同じ差分方程式:

$$
\Big((c-abz)q^{D_z}+(a+b)z-c-q+(q-z)q^{-D_z}\Big)\,{}_2\phi_1\left({a,\,b \atop c}\middle|\,q\,;z\right)=0,
\tag{10.41}
$$

を満たすことである．ここで，D_z の定義は $D_z \stackrel{\text{def}}{=} z\frac{d}{dz}$ で $q^{D_z}f(z)=f(qz)$ となる．この状況は，q が $0<q<1$ から $|q|=1$ と変わっても，同じである．しかし，$|q|=1$ では，無限までずらした q-階乗関数 $(a;q)_\infty$ が収束しない．

$|q|=1$ の場合の，接続公式は知られていないので，透過振幅 $t(k)$ および反射振幅 $r(k)$ を解析的に導出はできないが，予想をすることはできる．q-ガンマ関数の $|q|=1$ の場合の対応物は，量子二重対数関数 (10.26) なので，まず

$$
\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(z+i\tfrac{\gamma}{2}+i\pi\big),\ q=e^{-i\gamma}
\tag{10.42}
$$

を導入する．ハミルトニアン $\mathcal{H}$ (10.32) の透過・反射振幅の予想は

$$
t(k)=e^{i\frac{\gamma}{2}h(h+1)}\frac{\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(-k\gamma+i\gamma h)\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(-k\gamma-i\gamma(h+1))}{\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(-k\gamma)\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(-k\gamma-i\gamma)},
\tag{10.43}
$$

$$
r(k)=e^{\frac{k\gamma}{2}(1-ik)}\frac{\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(k\gamma)\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(-k\gamma+i\gamma h)\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(-k\gamma-i\gamma(h+1))}{\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(-k\gamma)\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(i\gamma h)\Phi^{(+)}_{\frac{\gamma}{2}}(-i\gamma(h+1))}.
\tag{10.44}
$$

これらは，散乱振幅に関する知られた基準をすべて満たす．明らかに，パラメタ反転 $-h \leftrightarrow h+1$ (10.38) に関して不変である．$t(k)$ $(k=i\kappa,\ \kappa>0)$ の分子にある量子二重対数関数 $\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(-k\gamma+i\gamma(h+\frac{1}{2})+i\pi\big)$ の極の位置

$$
k=i(h-n),\quad n=0,1,\ldots,[h]',
\tag{10.45}
$$

は，固有値 $\mathcal{E}_n=\mathcal{E}^{\mathrm{s}}_{i(h-n)}=-4\sin^2\frac{\gamma}{2}(h-n)$ (10.34) に対応している．

$0 < \kappa \leq \frac{\pi}{\gamma}$ の範囲では，$t(k)$ は他に極を持たない．散乱振幅達は，ユニタリ性の条件

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1 \quad (k \in \mathbb{R}_{>0}), \tag{10.46}$$

を満たす．パラメタ h が正の整数 N に等しいとき，以前に無反射ポテンシャルで得られた式 (10.8) の特別の場合 $k_j = j$ $(j = 1, \ldots, N)$ に帰着する:

$$t(k) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\sinh \frac{\gamma}{2}(k + i\,j)}{\sinh \frac{\gamma}{2}(k - i\,j)}, \quad r(k) = 0. \tag{10.47}$$

$r(k)$ の分母の量子二重対数関数 $\Phi_{\frac{\gamma}{2}}\big(i\gamma(h + \frac{1}{2}) + i\pi\big)$ が $h = N$ で持つ極は，無反射性を表している．$r(k)$ は，他に零点を持たない．これらは，また形状不変性に由来する制限 (5.7)–(5.8) を離散量子力学系に拡張したものを満たす．以上により，散乱振幅 (10.43), (10.44) は正しいものであると予想される．

これらの結果を確認するには，量子二重対数関数の関数方程式 (10.27), (10.37) の他に，量子二重対数関数の次にあげる性質や公式が役に立つ：

関数関係式:

$$\frac{\Phi_\gamma(z + i\pi)}{\Phi_\gamma(z - i\pi)} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\pi}{\gamma}z}}, \quad \Phi_\gamma(z)^* = \frac{1}{\Phi_\gamma(z^*)} \ (\text{複素共役}), \tag{10.48}$$

$$\Phi_\gamma(z)\Phi_\gamma(-z) = \exp\left(\frac{i}{4\gamma}\left(z^2 + \frac{\gamma^2 + \pi^2}{3}\right)\right). \tag{10.49}$$

極と零点:

$$\Phi_\gamma(z) \text{ の極}: z = i\big((2n_1 - 1)\gamma + (2n_2 - 1)\pi\big) \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}), \tag{10.50}$$

$$\Phi_\gamma(z) \text{ の零点}: z = -i\big((2n_1 - 1)\gamma + (2n_2 - 1)\pi\big) \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}). \tag{10.51}$$

漸近形: $(|\mathrm{Im}\, z| < \gamma + \pi)$

$$\Phi_\gamma(z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{i}{4\gamma}\left(z^2 + \frac{\gamma^2+\pi^2}{3}\right)\right) & (\mathrm{Re}\, z \to \infty) \\ 1 & (\mathrm{Re}\, z \to -\infty) \end{cases}. \tag{10.52}$$

専門家による，$|q| = 1$ の場合の q-超幾何関数の接続公式の解析的導出を強く待ち望んでいる．

おわりに

本書の内容に深く関係しているが，紙数の制限等により触れることのできなかった興味深いいくつかの話題や，全体についての注釈等について，簡単に述べよう．

触れられなかった一番大きな話題は，多変数（多自由度）の可解な量子力学系である．多変数の通常の可解量子力学のよく知られた例としては，Calogero-Sutherland 系[12]があり，その固有関数系として Jack 多項式等が知られている．対応する多変数の可解離散量子力学（純虚数ずらし）では，Ruijsenaars-Schneider-van Diejen 系[89], [90]があり，固有関数系として Macdonald 多項式等[91]が知られている．多変数の可解量子力学，oQM, idQM の両方とも，その可解性の背後には，反射群 (reflection group) の対称性のあることが知られている．対比すると，多変数の可解離散量子力学（実数ずらし）の理論では，Calogero-Sutherland, Ruijsenaars-Schneider-van Diejen に匹敵するような標準的な理論の誕生が待たれるところである．また，一変数の可解性の種々の道具・概念，形状不変性，閉性関係式，ハイゼンベルグ解，正弦的座標，双対多項式等，の多変数版の理解・拡張も興味深い問題である．特に大きな未解決の問題としては，知られた多変数可解量子力学の変形であろう．言い換えると，「Calogero-Sutherland 系や Ruijsenaars-Schneider-van Diejen 系に現れる多変数直交多項式の（多添え字）変形で，ある次数 ($\ell \geq 1$) 以上から始まるものを作れ」という問題である．一変数の場合には，因子化ハミルトニアンの $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}^\dagger$ の順序を変えるだけで，絡み合わせ関係式ができたが，多変数では，これが効かない．斬新的なアイデアが必要とされるところである．

第二の大きな話題は，古典直交多項式，エルミート，ラゲール，ヤコビ，Wilson, Askey-Wilson, (q-)Racah 等，の零点に関するものである．一般の直交多項式の零点に関する古典数学の豊かな内容については，本書の立場から特に付け加えるべき点もなかったことにより，全く触れることができなかった．

しかしながら，多変数の可解量子力学系と古典直交多項式の零点とは，密接に関係している．Calogero-Sutherland 系のポテンシャルの古典平衡点が，エルミート，ラゲール，ヤコビ多項式の零点で記述され，Ruijsenaars-Schneider-van Diejen 系の対応する古典平衡点が，Wilson, Askey-Wilson 多項式の零点で記述される．多体系の可解性および古典直交多項式が 2 階の微分・差分方程式を満たすことから，その零点に関して多くの興味深い関係式が得られる．

本書を通じて，1 次元可解量子力学とその種々の変形を議論した．主な道具はダルブー・クラム変換であり，そこに現れる種々の量が，簡潔な行列式表示，ロンスキアンおよびカソラティアン，を持っていた．紙数の関係で示せなかったが，可解な離散量子力学に現れる古典直交多項式（Askey-scheme の超幾何直交多項式）は，皆カソラティアン恒等式を満たす．このように，重要な役割を果たすカソラティアンが，数ある直交多項式の教科書のどこにも触れられていないのは残念至極である．

記号，記法，名称などについては，最も標準的なものに準拠して，他の教科書・論文との参照が楽になるように心がけた．しかしながら，可解離散量子力学（実数ずらし）に現れる直交多項式，Racah, q-Racah, その他について本書で用いたパラメタ化は，通常に用いられているもの（例えば，[6]）とは異なることを，もう一度注意しておこう．本書のものは，系の対称性を明示的に表したもので，多添え字直交多項式を構成する場合等に都合がよい．本書を通じて，これらのパラメタ化が広く流通するようになることを願っている．

付録 A
記号，定義，公式など

○ ずらした階乗関数（Pochhammer の記号）$(a)_n$:

$$(a)_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{n}(a+k-1) = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \quad \text{(A.1)}$$

○ ずらした q-階乗関数（q-Pochhammer の記号）$(a;q)_n$:

$$(a;q)_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{n}(1-aq^{k-1}) = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}), \quad \text{(A.2)}$$

$$(a;q)_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad (a;q)_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{\infty}(1-aq^{k-1}), \quad 0<|q|<1, \quad \text{(A.3)}$$

$$(a;q)_{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(aq^{-n};q)_n} = \frac{(-qa^{-1})^n}{(qa^{-1};q)_n} q^{\binom{n}{2}}, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad \text{(A.4)}$$

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}, \quad \lim_{q\to 1}\frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} = (a)_n. \quad \text{(A.5)}$$

○ 超幾何関数 (hypergeometric function) ${}_rF_s$:

$${}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\cdots,a_r)_n}{(b_1,\cdots,b_s)_n}\frac{z^n}{n!}, \quad \text{(A.6)}$$

ここで $(a_1,\cdots,a_r)_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{r}(a_j)_n = (a_1)_n\cdots(a_r)_n$.

○ q-超幾何関数 (basic hypergeometric function) ${}_r\phi_s$:

$${}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, q; z\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\cdots,a_r;q)_n}{(b_1,\cdots,b_s;q)_n}(-1)^{(1+s-r)k} \times q^{(1+s-r)k(k-1)/2}\frac{z^n}{(q;q)_k}, \quad \text{(A.7)}$$

ここで $(a_1,\cdots,a_r;q)_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{r}(a_j;q)_n = (a_1;q)_n\cdots(a_r;q)_n$.

$$\lim_{q\to 1} {}_r\phi_s\left(\begin{matrix} q^{a_1}, \cdots, q^{a_r} \\ q^{b_1}, \cdots, q^{b_s} \end{matrix} \,\middle|\, q; (q-1)^{1+s-r}z\right) = {}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, z\right).$$

$$\tag{A.8}$$

○ ガンマ関数 $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{A.9}$$

○ q-ガンマ関数 $\Gamma_q(z)$:

$$\Gamma_q(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(q;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}(1-q)^{1-z},\ 0<q<1, \quad \lim_{q\to 1}\Gamma_q(z) = \Gamma(z), \tag{A.10}$$

$$\Gamma_q(z+1) = \frac{1-q^z}{1-q}\Gamma_q(z). \tag{A.11}$$

○ 微分方程式:

$$\mathrm{H}: \quad \partial_x^2 H_n(x) - 2x\partial_x H_n(x) + 2nH_n(x) = 0, \tag{A.12}$$

$$\mathrm{L}: \quad x\partial_x^2 L_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha+1-x)\partial_x L_n^{(\alpha)}(x) + nL_n^{(\alpha)}(x) = 0, \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J}: \quad (1-x^2)\partial_x^2 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &+ \big(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\big)\partial_x P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+ n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0.\end{aligned} \tag{A.14}$$

○ ロドリーグ (Rodrigues) の公式:

$$\mathrm{H}: \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}, \tag{A.15}$$

$$\mathrm{L}: \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{1}{e^{-x}x^\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \big(e^{-x}x^{n+\alpha}\big), \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J}: \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \\ &\quad \times \left(\frac{d}{dx}\right)^n \big((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\big).\end{aligned} \tag{A.17}$$

参考文献

[1] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. New York (1939).

[2] 犬井鉄郎，特殊関数，岩波全書，岩波書店 (1962).

[3] T. S. Chihara, *An Introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York (1978).

[4] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).

[5] M. E. H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005).

[6] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2010).

[7] 青本和彦，直交多項式入門，数学書房 (2013).

[8] P. A. M. Dirac, ディラック 量子力学 原書第 4 版 朝永振一郎他訳，岩波書店 (1968).

[9] L. D. Landau and L. M. Lifshitz, ランダウ＝リフシッツ量子力学—非相対論的理論 1 佐々木健他訳，東京図書 (1996).

[10] L. Infeld and T. E. Hull, "The factorization method," Rev. Mod. Phys. **23** (1951) 21–68.

[11] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, "Supersymmetry and quantum mechanics," Phys. Rep. **251** (1995) 267–385.

[12] F. Calogero, "Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials," J. Math. Phys. **12** (1971) 419–436; B. Sutherland, "Exact results for a quantum many-body problem in one-dimension. II," Phys. Rev. **A5** (1972) 1372–1376; J. Moser, "Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations," Adv. Math. **16** (1975) 197–220.

[13] G. Darboux, "Sur une proposition relative aux équations linéaires," *C. R. Acad. Paris* **94** (1882) 1456–1459.

[14] M. M. Crum, "Associated Sturm-Liouville systems," Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **6** (1955) 121–127, `arXiv:physics/9908019`.

[15] E. Witten, "Dynamical breaking of supersymmetry," Nucl. Phys. **B188** (1981) 513–554.

[16] M. G. Krein, "On continuous analogue of Christoffel's formula in orthogonal polynomial theory," Doklady Acad. Nauk. CCCP, **113** (1957) 970–973.

[17] V. É. Adler, "A modification of Crum's method," Theor. Math. Phys. **101** (1994) 1381–1386.

[18] E. A. Coddington and N. Levinson, 常微分方程式論　吉田節三訳，吉岡書店 (1968).

[19] L. E. Gendenshtein, "Derivation of exact spectra of the Schroedinger equation by means

of supersymmetry," JETP Lett. **38** (1983) 356–359.

[20] J. W. Dabrowska, A. Khare and U. P. Sukhatme, "Explicit wavefunctions for shape-invariant potentials by operator technique," J. Phys. **A 21** (1988) L195-L200.

[21] S. Odake and R. Sasaki, "Unified theory of annihilation-creation operators for solvable ('discrete') quantum mechanics," J. Math. Phys. **47** (2006) 102102 (33pp), `arXiv:quant-ph/0605215`.

[22] G. A. Natanzon, "General properties of potentials for which the Schrödinger equation can be solved by means of hypergeometric functions," Vestnik Leningrad Univ. **10** (1971) 22 (in Russian); Theor. Math. Phys. **38** (1979) 146–153.

[23] J. N. Ginocchio, "A class of exactly solvable potentials. I. One-dimensional Schrödinger equation," Annals of Phys. **152** (1984) 203–219.

[24] F. Cooper, J. N. Ginocchio and A. Khare, "Relationship between supersymmetry and solvable potentials," Phys. Rev. **D36** (1987) 2458–2473.

[25] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (2nd. ed.), Springer-Verlag, Berlin (1996).

[26] M. M. Nieto and L. M. Simmons, Jr., "Coherent States For General Potentials," Phys. Rev. Lett. **41** (1978) 207–210; "Coherent States For General Potentials," 1. Formalism, Phys. Rev. D **20** (1979) 1321–1331; 2. Confining One-Dimensional Examples, Phys. Rev. D **20** (1979) 1332–1341; 3. Nonconfining One-Dimensional Examples, Phys. Rev. D **20** (1979) 1342–1350.

[27] E. Routh, "On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order," Proc. London Math. Soc. **16** (1884) 245–261.

[28] S. Bochner, "Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme," Math. Zeit. **29** (1929) 730–736.

[29] S. Odake and R. Sasaki, "Orthogonal Polynomials from Hermitian Matrices," J. Math. Phys. **49** (2008) 053503 (43pp), `arXiv:0712.4106[math.CA]`.

[30] S. Odake and R. Sasaki, "Exactly solvable 'discrete' quantum mechanics; shape invariance, Heisenberg solutions, annihilation-creation operators and coherent states," Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 663–700, `arXiv:0802.1075[quant-ph]`.

[31] S. Odake and R. Sasaki, "Discrete quantum mechanics," (Topical Review) J. Phys. **A44** (2011) 353001 (47 pp), `arXiv:1104.0473[math-ph]`.

[32] S. Yu. Dubov, V. M. Eleonskiĭ and N. E. Kulagin, "Equidistant spectra of anharmonic oscillators," Soviet Phys. JETP **75** (1992) 446–451.

[33] D. Gómez-Ullate, N. Kamran and R. Milson, "An extension of Bochner's problem: exceptional invariant subspaces," J. Approx. Theory **162** (2010) 987–1006, `arXiv:0805.3376[math-ph]`; "An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm-Liouville problem," J. Math. Anal. Appl. **359** (2009) 352–367, `arXiv:0807.3939[math-ph]`.

[34] C. Quesne, "Exceptional orthogonal polynomials, exactly solvable potentials and supersymmetry," J. Phys. **A41** (2008) 392001 (6 pp), `arXiv:0807.4087[quant-ph]`; B. Bagchi,

C. Quesne and R. Roychoudhury, "Isospectrality of conventional and new extended potentials, second-order supersymmetry and role of PT symmetry," Pramana J. Phys. **73** (2009) 337–347, arXiv:0812.1488[quant-ph].

[35] S. Odake and R. Sasaki, "Infinitely many shape invariant potentials and new orthogonal polynomials," Phys. Lett. **B679** (2009) 414–417, arXiv:0906.0142[math-ph].

[36] C. Quesne, "Solvable rational potentials and exceptional orthogonal polynomials in supersymmetric quantum mechanics," SIGMA **5** (2009) 084 (24 pp), arXiv:0906.2331 [math-ph].

[37] S. Odake and R. Sasaki, "Another set of infinitely many exceptional (X_ℓ) Laguerre polynomials," Phys. Lett. **B684** (2010) 173–176, arXiv:0911.3442[math-ph]. (Remark: J1(J2) in this reference corresponds to J2(J1) in later references.)

[38] S. Odake and R. Sasaki, "Infinitely many shape invariant potentials and cubic identities of the Laguerre and Jacobi polynomials." J. Math. Phys. **51** (2010) 053513 (9pp), arXiv: 0911.1585[math-ph].

[39] S. Odake and R. Sasaki, "A new family of shape invariantly deformed Darboux-Pöschl-Teller potentials with continuous ℓ," J. Phys. A **44** (2011) 195203 (14pp), arXiv: 1007.3800[math-ph].

[40] S. Odake and R. Sasaki, "Exactly solvable quantum mechanics and infinite families of multi-indexed orthogonal polynomials," Phys. Lett. **B702** (2011) 164–170, arXiv: 1105.0508[math-ph].

[41] R. Sasaki, S. Tsujimoto and A. Zhedanov, "Exceptional Laguerre and Jacobi polynomials and the corresponding potentials through Darboux-Crum transformations," J. Phys. **A43** (2010) 315204 (20pp), arXiv:1004.4711[math-ph].

[42] C.-L. Ho, S. Odake and R. Sasaki, "Properties of the exceptional (X_ℓ) Laguerre and Jacobi polynomials," SIGMA **7** (2011) 107 (24 pp), arXiv:0912.5447[math-ph].

[43] D. Gómez-Ullate, N. Kamran and R. Milson, "A conjecture on exceptional orthogonal polynomials," Found. Comput. Math. **13** (2013) 615–656, arXiv:1203.6857[math-ph].

[44] R. Sasaki and K. Takemura, "Global solutions of certain second order differential equations with a high degree of apparent singularity," SIGMA **8** (2012) 085 (18pp), arXiv: 1207.5302[math.CA].

[45] C.-L. Ho, R. Sasaki and K. Takemura, "Confluence of apparent singularities in multi-indexed orthogonal polynomials: the Jacobi case," J. Phys. A **46** (2013) 115205 (21pp), arXiv:1210.0207[math.CA].

[46] S. Odake and R. Sasaki, "Krein-Adler transformations for shape-invariant potentials and pseudo virtual states," J. Phys. A **46** (2013) 245201 (24pp), arXiv:1212.6595[math-ph].

[47] L. García-Gutiérrez, S. Odake and R. Sasaki, "Modification of Crum's Theorem for 'Discrete' Quantum Mechanics," Prog. Theor. Phys. **124** (2010) 1–26, arXiv:1004.0289[math-ph].

[48] S. Odake and R. Sasaki, "Extensions of solvable potentials with finitely many discrete eigenstates," J. Phys. A **46** (2013) 235205 (15pp), `arXiv:1301.3980[math-ph]`.

[49] C.-L. Ho, J.-C. Lee and R. Sasaki, "Scattering amplitudes for multi-indexed extensions of solvable potentials," Annals of Physics **343** (2014) 115–131, `arXiv:1309.5471[quant-ph]`.

[50] A. Khare and U. P. Sukhatme, "Scattering amplitudes for supersymmetric shape-invariant potentials by operator methods," J. Phys. **A21** (1988) L501-L508.

[51] I. Kay and H. M. Moses, "Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials," J. Appl. Phys. **27** (1956) 1503–1508.

[52] R. Hirota, "Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons," Phys. Rev. Lett. **27** (1971) 1192–1194.

[53] R. Sasaki, "Exactly solvable potentials with finitely many discrete eigenvalues of arbitrary choice," J. Math. Phys. **55** (2014) 062101 (11pp), `arXiv:1402.5474[math-ph]`.

[54] V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux transformations and solitons*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1991).

[55] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, and V. B. Uvarov, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[56] A. Degasperis and S. N. M. Ruijsenaars, "Newton-Equivalent Hamiltonians for the Harmonic Oscillator," Ann. Phys. **293** (2001) 92–109.

[57] S. Odake and R. Sasaki, "Unified theory of exactly and quasi-exactly solvable 'discrete' quantum mechanics: I. Formalism," J. Math. Phys **51** (2010) 083502 (24pp), `arXiv:0903.2604[math-ph]`.

[58] S. Odake and R. Sasaki, "Crum's Theorem for 'Discrete' Quantum Mechanics," Prog. Theor. Phys. **122** (2009) 1067–1079, `arXiv:0902.2593[math-ph]`.

[59] S. Odake and R. Sasaki, "Multi-indexed Wilson and Askey-Wilson polynomials," J. Phys. **A46** (2013) 045204 (22 pp), `arXiv:1207.5584[math-ph]`.

[60] S. Odake and R. Sasaki, "Dual Christoffel transformations," Prog. Theor. Phys. **126** (2011) 1–34, `arXiv:1101.5468[math-ph]`.

[61] S. Odake and R. Sasaki, "q-oscillator from the q-Hermite polynomial," Phys. Lett. **B663** (2008) 141–145, `arXiv:0710.2209[hep-th]`.

[62] D. Leonard, "Orthogonal polynomials, duality, and association schemes," SIAM J. Math. Anal. **13** (1982) 656–663.

[63] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, (1984); P. Terwilliger, "Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other; an algebraic approach to the Askey scheme of orthogonal polynomials," `arXiv:math.QA/0408390`.

[64] S. Odake and R. Sasaki, "Exceptional (X_ℓ) (q)-Racah polynomials," Prog. Theor. Phys. **125** (2011) 851–870, `arXiv:1102.0812[math-ph]`.

[65] S. Odake and R. Sasaki, "Multi-indexed (q-)Racah polynomials," J. Phys. **A45** (2012) 385201 (21 pp), `arXiv:1203.5868[math-ph]`.

[66] R. Sasaki, "Exactly solvable birth and death processes," J. Math. Phys. **50** (2009) 103509 (18pp), `arXiv:0903.3097[math-ph]`.

[67] S. Karlin and J. L. McGregor, "The differential equations of birth-and-death processes," Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957) 489–546.

[68] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications, I*, (2nd ed.), Wiley, New York (1966).

[69] A. S. Zhedanov, ""Hidden Symmetry" of Askey-Wilson Polynomials," Theor. Math. Phys. **89** (1992) 1146–1157.

[70] Ya. I. Granovskii, I. M. Lutzenko and A. Zhedanov, "Mutual Integrability, Quadratic Algebras, and Dynamical Symmetry," Ann. Phys. **217** (1992) 1–20.

[71] L. Vinet and A. Zhedanov, "Quasi-linear algebras and integrability (the Heisenberg picture)," SIGMA **4** (2008) 015 (22 pages), `arXiv:0802.0744[math.QA]`.

[72] T. H. Koornwinder, "Zhedanov's Algebra AW(3) and the Double Affine Hecke Algebra in the Rank One Case. II. The Spherical Subalgebra," SIGMA **4** (2008) 052 (17 pages), `arXiv:0711.2320[math.QA]`.

[73] S. Odake and R. Sasaki, "Exceptional Askey-Wilson type polynomials through Darboux-Crum transformations," J. Phys. **A43** (2010) 335201 (18pp), `arXiv:1004.0544[math-ph]`.

[74] S. Odake, "Equivalences of the Multi-Indexed Orthogonal Polynomials," J. Math. Phys. **55** (2014) 013502, `arXiv:1309.2346 [math-ph]`.

[75] K. Takemura, "Multi-indexed Jacobi polynomials and Maya diagrams," `arXiv:1311.3570 [math-ph]`.

[76] G. M. L. Gladwell, *Inverse Problems in Vibration*, Kluwer, Dordrecht (2004).

[77] S. Odake and R. Sasaki, "Reflectionless potentials for difference Schrödinger equations," J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 115204, `arXiv:1411.2307[math-ph]`.

[78] S. Odake and R. Sasaki, "Solvable Discrete Quantum Mechanics: q-Orthogonal Polynomials with $|q| = 1$ and Quantum Dilogarithm," J. Math. Phys. **56** (2015) 073502 (25pp), `arXiv:1406.2768[math-ph]`.

[79] V. Spiridonov and A. Zhedanov, "Discrete reflectionless potentials, quantum algebras and q-orthogonal polynomials," Ann. Phys. **237** (1995) 126–146; J. F. van Diejen and A. N. Kirillov, "Formulas for q-spherical functions using inverse scattering theory of reflectionless Jacobi operators," Commun. Math. Phys. **210** (2000) 335–369.

[80] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, "Quantum dilogarithm," Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 427–434, `arXiv:hep-th/9310070`; L. Faddeev, "Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group," Lett. Math. Phys. **34** (1995) 249–254, `arXiv:hep-th/9504111`.

[81] M. Jimbo and T. Miwa, "Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of

the XXZ model in the gapless regime," J. Phys. **A29** (1996) 2923–2958, arXiv:hep-th/9601135; S. Kharchev, D. Lebedev and M. Semenov-Tian-Shansky, "Unitary representations of $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$, the modular double and the multiparicle q-deformed Toda chains," Comm. Math. Phys. **225** (2002) 573–609, arXiv:hep-th/0102180.

[82] E. W. Barnes, "The theory of the double gamma function," Phil. Trans. Roy. Soc. **A196** (1901) 265–387; "On the theory of the multiple gamma function," Trans. Camb. Phil. Soc. **19** (1904) 374–425.

[83] T. Shintani, "On a Kronecker limit formula for real quadratic fields," J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A **24** (1977) 167–199.

[84] N. Kurokawa, "On the generalization of the sine function," (in Japanese) Technical Report of Tsuda University **4** (1992) 1–25.

[85] T. Oshima, "On convergence of basic hypergeometric series," arXiv:1504.01238 [math.CA].

[86] C. Baxa, "Calculation of improper integrals using uniformly distributed sequences," Acta Arithmetica, **119** (2005) 373–406.

[87] G. N. Watson, "The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series," Trans. Camb. Phil. Soc. **21** (1910) 281–299.

[88] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, 2nd ed. Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge (2004).

[89] S. N. M. Ruijsenaars and H. Schneider, "A New Class Of Integrable Systems And Its Relation To Solitons," Ann. Phys. **170** (1986) 370–405; S. N. M. Ruijsenaars, "Complete Integrability of Relativistic Calogero-Moser Systems And Elliptic Function Identities," Comm. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.

[90] J. F. van Diejen, "Integrability of difference Calogero-Moser systems," J. Math. Phys. **35** (1994) 2983–3004; "Multivariable continuous Hahn and Wilson polynomials related to integrable difference systems," J. Phys. **A28** (1995) L369-L374.

[91] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed. Oxford Mathematical monograph, Clarendon press, Oxford (1995).

索　　引

欧字

$*$ 演算　82
$1/\cosh^2 x$ ポテンシャル　32, 78, 159
$1/\sin^2 x$ ポテンシャル　29, 46

Askey-Wilson 代数　123
Askey-Wilson 多項式　81, 85, 91, 160

Favard の定理　39

idQM　81

Karlin-McGregor 多項式　114
KdV 方程式　75

Meixner-Pollaczek 多項式　81, 85
Meixner 多項式　81, 85

q-Racah 多項式　81, 85
q-ガンマ関数　86, 170
q-超幾何関数　169
q-超球多項式　160

Racah 多項式　81, 85
rdQM　81

Wilson 多項式　81, 85

ア

位相のずれ　74
井戸型ポテンシャル　7
因子化　16
因子化ハミルトニアン　3, 82, 89

エッカートポテンシャル　34
エルミート性　88, 135
エルミート多項式　16, 20, 22, 45
遠心力付きの振動子　15, 45

カ

確定特異点　19
確率分布　36, 113
カシミア演算子　124
仮想状態波動関数　52–54, 126
仮想状態ベクトル　137
カソラティアン　89
絡み合わせ関係式　4, 89
関数方程式　161
ガンマ関数　86, 170

擬仮想状態波動関数　52, 55
擬ゼロモード　137
基底状態波動関数　3, 86
擬定数　83
逆相似変換　36
鏡映変換性　66
虚離散量子力学　81

クーロンポテンシャル　30
矩形領域　88
クライン・アドラー変換　12, 70
クラムの定理　7, 89
クラムの定理の拡張　10, 100

形状不変性　23, 96
ゲーゲンバウアー多項式　48, 79
ケプラー問題　31

後方ずらし演算子　27, 98
古典直交多項式　16
コヒーレント状態　44, 108
固有値問題　2

サ

削除されている　4
差分演算子　81
三角性　16, 84, 115
三項関係式　39, 109
三重対角行列　109
散乱振幅　73
散乱問題　73, 154

自己共役性　88, 135

自己双対　112
指数関数種解　76, 155
実数ずらし　81, 102, 109, 113, 137
実離散量子力学　81
種解　14
出生死亡過程　113
純虚数ずらし　81, 100, 126
消滅演算子　42, 108
振動定理　2, 11, 57

推移確率　37, 114
随伴演算子　39
随伴ハミルトニアン　4
スケール変換　96
ずらした q-階乗関数　86, 91, 165, 169
ずらした階乗関数　13, 16, 169

正弦的座標　16
正弦的座標の一覧　116
生成演算子　42, 108
接続公式　79, 165
ゼロモード　3, 83, 86, 95
漸近指数　77
前方ずらし演算子　27, 98

双曲的対称こま　33
双曲的ポッシェル・テラーポテンシャル　34
相似変換　16, 83
双スペクトル　113
双対性　50, 70, 87
双対性の対応　111
双対多項式　109
双対閉性関係式　121

タ

多項式種解　52, 126
多重ソリトン解　75
多添え字多項式　56
多添え字直交多項式　130, 147
ダルブー・クラム変換　4
ダルブー変換　13, 70, 93

チェビシェフ多項式　8, 9, 91
チャップマン・コルモゴロフ方程式　37
超幾何関数　169
超幾何直交多項式　81
超球多項式　79
超対称量子力学　9
調和振動子　15, 44
直交重み関数　17, 86
直交有理関数　57

対合　85

定常分布　36, 114

統一理論　115
透過振幅　73, 79
等スペクトル　4, 93
動力学的対称性　44, 108
特性指数　19, 59
飛び越し固有関数　52, 80

ナ

内積　2, 82
内部自己同型写像　85
ナタンゾンポテンシャル　35

ハ

ハイゼンベルグ演算子解　38, 107
波数　73
パラメタのずらし　23, 96
反射振幅　73, 79
半正定値　2, 82
半負定値　36

非一意性　83
ひねり　53
ひねり演算子　127, 137

ファンデルモンド行列式　77
フォッカー・プランク方程式　36, 113
フックス型　19, 59
普遍的ロドリーグ公式　24, 28, 99
プレポテンシャル　3
分母多項式　56, 130, 147

閉性関係式　40, 107, 121
変形された散乱問題　80

母関数　44, 46, 48
補助関数　97, 100, 103

ポッシェル・テラーポテンシャル　16
ボッホナーの定理　49

マ

見かけの特異点　59

無反射ポテンシャル　75, 154

モースポテンシャル　31
モーメント問題　83
モノドロミー　19
モノドロミー保存　25

ヤ

ヤコビ行列　109
ヤコビ多項式　9, 16

ユニタリ性　79, 166

ラ

ラゲール多項式　16, 21, 22, 46

離散対称性　127
離散対称性変換　20, 53, 80
量子二重対数関数　161

例外直交多項式　51

ローゼン・モースポテンシャル　33
ロドリーグ公式　170
ロンスキアン　5, 90

著者略歴

佐々木 隆
ささき りゅう

1976年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了（理学博士）
マックス・プランク（物理学・宇宙物理学）研究所，
コペンハーゲン大学ニールス・ボーア研究所，
ユトレヒト大学理論物理学研究所で研究員
1982年 広島大学理論物理学研究所助教授，
1990年 京都大学基礎物理学研究所助教授，准教授を経て
2013年 定年退職，信州大学特任教授（教育），現在に至る．
この間，ダラム大学（英国），国立台湾大学で客員教授を務める．

専門・研究分野 場の理論，数理物理学

主要著書

『物理学者のためのトポロジーと幾何学』マグロウヒル出版 (1989) 監訳
『物理数学』培風館 物理学基礎シリーズ 11 (1995)
『相対性理論』裳華房 テキストシリーズ—物理学 (2001) （共著者 窪田高弘）

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 122
『可解な量子力学系の数理物理 直交多項式の生み出す多様な展開』
著 者 佐々木 隆
2016年2月25日 初版発行

数理科学編集部 発行人 森 平 敏 孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで． 表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サイエンス社 TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25 振替 00170–7–2387 (03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本 三美印刷株式会社 山岡景仁